

N° D'ORDRE :

381

Série A

N° 357

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

Émile FOULON

Ingénieur civil des Constructions, A.I.Lg.
Assistant à l'Université de Liège

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES LIGNES D'INFLUENCE EXACTES DES ARCS
QUELCONQUES PLANS EN TREILLIS ARTICULÉ A
MONTANTS ET CROIX DE SAINT-ANDRÉ.

2^e THÈSE. — ÉTUDE ET CONTRÔLE DES MATÉRIAUX AU MOYEN DES
RAYONS X.

Soutenues le _____, devant la Commission d'Examen.

30 MARS 1938

MM. BÉGHIN, *Président.*

VILLEY
PÉRES } *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1938

N° D'ORDRE :

381

Série A

N° 357

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

PAR

Émile FOULON

Ingénieur civil des Constructions, A.I.Lg.

Assistant à l'Université de Liège

1^{re} THÈSE. — THÉORIE DES LIGNES D'INFLUENCE EXACTES DES ARCS
QUELCONQUES PLANS EN TREILLIS ARTICULÉ A
MONTANTS ET CROIX DE SAINT-ANDRÉ.

2^e THÈSE. — ÉTUDE ET CONTRÔLE DES MATÉRIAUX AU MOYEN DES
RAYONS X.

Soutenues le

, devant la Commission d'Examen.

MM. BÉGHIN,

Président.

VILLEY

PÉRÈS

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1938

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen..... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.

<i>Professeurs honoraires</i>	H. LEBESGUE.	FREUNDLER.	VESSIOT.	Charles FABRY.
	A. FERNBACH.	AUGER.	P. PORTIER.	LÉON BERTRAND.
	Émile PICARD.	BLAISE.	M. MOLLIARD.	WINTREBERT.
	Léon BRILLOUIN.	DANGEARD.	L. LAPICQUE.	O. DUBOSQ.
	GUILLET.	LESPIEAU.	G. BERTRAND.	BOHN.
	PÉCHARD.	MARCHIS.	H. ABRAHAM.	

PROFESSEURS

M. CAULLERY.....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).	E. ESCLANGON ...	T	Astronomie.
G. URBAIN.....	T	Chimie générale.	M ^{me} RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.
Émile BOREL.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	H. BÉGHIN.....	T	Mécanique physique et expérimentale.
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.	FOCH.....		Mécanique expérimentale des fluides.
E. CARTAN.....	T	Géométrie supérieure.	PAUTHENIER.....		Physique (P. C. B.).
A. COTTON.....	T	Recherches physiques.	De BROGLIE.....	T	Théories physiques.
J. DRACH.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	CHRÉTIEN.....		Optique appliquée.
Charles PÉREZ...	T	Zoologie.	P. JOB.....		Chimie générale.
E. RABAUD.....	T	Biologie expérimentale.	LABROUSTE.....		Physique du globe.
M. GUICHARD.....		Chimie minérale.	PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
Paul MONTEL...	T	Mécanique des fonctions et théorie des transformations.	VILLEY.....		Mécanique physique et expérimentale.
L. BLARINGHEM...	T	Botanique.	COMBES	T	Physiologie végétale.
G. JULIA.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.	GARNIER.....	T	Mathématiques générales.
C. MAUGUIN.....	T	Minéralogie.	PÈRES.....		Mécanique théorique des fluides.
A. MICHEL-LÉVY..	T	Pétrographie.	HACKSPILL.....		Chimie (P. C. B.).
H. BÉNARD.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	LAUGIER.....	T	Physiologie générale.
A. DENJOY	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	TOUSSAINT.....		Technique Aéronautique.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.	M. CURIE.....		Physique (P. C. B.).
Eugène BLOCH...	T	Physique.	G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.
G. BRUHAT.....		Physique.	CHAZY.....	T	Mécanique rationnelle.
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.	GAULT.....		Chimie (P. C. B.).
A. DEBIERNE.....	T	Physique générale et Radioactivité.	CROZE.....		Recherches. Physiques.
A. DUFOUR.....	T	Physique (P. C. B.).	DUPONT.....	T	Théories chimiques.
L. DUNOYER.....		Optique appliquée.	LANQUINE.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
A. GUILLIERMOND.	T	Botanique.	VALIRON.....		Mathématiques générales.
M. JAVILLIER.....	T	Chimie biologique.	BARRABÉ.....		Géologie structurale et géologie appliquée.
L. JOLEAUD.....		Paléontologie.	MILLOT.....		Zoologie (P. C. B.).
ROBERT-LÉVY.....	T	Physiologie comparée.	F. PERRIN.....		Théories physiques.
F. PICARD.....		Zoologie (Évolution des êtres organisés).	VAVON.....		Chimie organique.
Henri VILLAT...	T	Mécanique des fluides et applications.	G. DARMOIS.....		Calcul des Probabilités et Physique-Mathématique.
Ch. JACOB.....	T	Géologie.	CHATTON.....	T	Biologie maritime.
P. PASCAL.....	T	Chimie minérale.	AUBEL.....		Chimie biologique.
M. FRÉCHET.....	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	J. BOURCART.....		Géographie physique et Géologie dynamique.
			M ^{me} JOLIOT-CURIE.		Physique générale et Radioactivité.
			PLANTEFOL.....		Biologie végétale (P.C.B.).
			CABANNES.....		Enseignement de Physique.
			GRASSÉ.....		Biologie animale (P.C.B.).
			PRÉVOST.....		Chimie (P.C.B.).

Secrétaire..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.



A MONSIEUR LE PROFESSEUR

FERNAND CAMPUS

En hommage reconnaissant.

*

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	3

CHAPITRE I.

Principes de la méthode et procédés d'application.

1. Principes de la méthode.....	11
a. Tracé de Cremona.....	11
b. Tracé de Williot.....	13
c. Principe de superposition.....	16
d. Principe de réciprocité de Maxwell.....	17
e. Principe des travaux virtuels.....	21
f. Comparaison du principe de réciprocité de Maxwell et du principe des travaux virtuels.....	22
2. Procédés d'application, aux systèmes extérieurement isostatiques, des méthodes exposées ci-dessus.....	24
a. Systèmes intérieurement isostatiques et indéformables.....	26
b. Systèmes articulés hyperstatiques du premier degré et indéformables.....	26
c. Systèmes articulés hyperstatiques du second degré et indéformables..	26
d. Systèmes articulés hyperstatiques de degré plus élevé.....	27
e. Fermes à montants et croix de Saint-André.....	27

CHAPITRE II.

Étude des lignes d'influence, pour des forces extérieures quelconques, des efforts principaux dans les barres des arcs en treillis articulé à montants et croix de Saint-André.

I. Considérations générales et principe de la méthode.....	29
II. Notations.....	33
III. Première partie : lignes d'influence des montants surabondants 1 à n.....	34
1. Première phase : A. Ligne d'influence, pour des forces de directions quelconques, du montant d'extrémité r du tronçon à r panneaux qui se trouve à gauche de ce montant. Formules de récurrence.....	34

	Pages.
B. Lignes d'influence, pour des forces extérieures de directions quelconques, du montant d'extrémité s' du tronçon à s panneaux, qui se trouve à droite de ce montant. Formules de récurrence	48
C. Résumé de la première phase du calcul des formules de récurrence entre les lignes d'influence des montants surabondants	53
2. Deuxième phase : Lignes d'influence définitives, pour des charges de directions quelconques, de l'effort normal dans un montant intermédiaire r quelconque, dans l'arc entier à n panneaux	54
3. Résumé de la première partie	66
IV. Deuxième partie : Lignes d'influence des efforts principaux dans toutes les barres non surabondantes (membrures et diagonales)	68
V. Poutres droites en treillis articulé à montants et croix de Saint-André ..	71
VI. Discussion de la méthode	74

CHAPITRE III.

Application des formules du chapitre précédent au calcul rigoureux des lignes d'influence d'un arc biarticulé à montants et croix de Saint-André.

I. Généralités et calcul des dimensions de l'arc	79
II. Prédétermination des sections	81
III. Calcul des lignes d'influence exactes	83
1. Lignes d'influence exactes des montants surabondants, dans l'arc rendu isostatique extérieurement	85
2. Calcul des lignes d'influence exactes de la poussée q	109
3. Calcul des lignes d'influence des barres des membrures et des diagonales, dans l'arc rendu isostatique intérieurement et extérieurement	119
4. Calcul des corrections, dues aux montants, des lignes d'influence des membrures et des diagonales trouvées pour l'arc rendu entièrement isostatique. Lignes d'influence exactes dans l'arc rendu seulement isostatique extérieurement	123
5. Corrections, dues à la poussée, des lignes d'influence des montants, des membrures et des diagonales de l'arc rendu isostatique extérieurement. Lignes d'influence définitives dans l'arc biarticulé	129
IV. Comparaison sommaire des lignes d'influence exactes et des lignes d'influence approchées, dans l'arc biarticulé	135
CONCLUSION	137
PLANCHES I à XVIII.	
DEUXIÈME THÈSE	139



PREMIÈRE THÈSE

THÉORIE

DES

LIGNES D'INFLUENCE EXACTES

DES

ARCS QUELCONQUES

PLANS EN TREILLIS ARTICULÉ

A MONTANTS ET CROIX DE SAINT-ANDRÉ.

INTRODUCTION.

Jusqu'à présent, on s'est généralement borné, par intuition, à calculer les poutres en treillis articulé à montants et croix de Saint-André (*fig. 6, a*), plus particulièrement les poutres droites, comme systèmes multiples formés de deux poutres isostatiques ordinaires en treillis simple. Ces dernières sont, dans cette hypothèse, constituées, chacune et dans chaque panneau, par les membrures, les montants et l'une seulement des deux diagonales croisées du même panneau de la poutre d'origine. Nous verrons, à la fin de notre travail, quel est l'ordre de grandeur de l'approximation de cette méthode. Nous exposerons tout d'abord une théorie *exacte* des *lignes d'influence* des efforts *principaux* dans les barres des fermes à montants et croix de Saint-André ⁽¹⁾. Nous en donnerons ensuite une application.

Cette théorie exacte présente sans aucun doute un réel intérêt, non

(1) Ce type de ferme est dû à Navier.

seulement théorique, mais aussi pratique, ne fût-ce que pour apprécier l'importance des erreurs résultant des méthodes approchées qui ont été préconisées par Jean Résal. Certes, les poutres en treillis à montants et croix de Saint-André ne jouissent plus d'une si grande faveur que pendant la seconde moitié du siècle dernier, mais on les applique encore assez souvent à l'heure actuelle. On les rencontre sous forme de contreventements, ainsi qu'en général partout où il y a renversement du sens de l'effort tranchant. Il en est ainsi tout particulièrement dans les piles et pylônes, dans les panneaux centraux des maîtresses-poutres de faible portée, par suite de l'influence prépondérante des charges mobiles et, ainsi, de la variation du signe de l'effort tranchant; enfin, dans les ponts Scherzer, les ponts basculants et les ponts tournants, en raison du changement de sens des efforts pendant la manœuvre (exemples : pont tournant de Brest, en France; pont basculant de Selzaete, en Belgique). En outre, on utilise ce système dans les vannes métalliques des barrages et les portes d'écluses. Il a l'avantage de présenter une flèche inférieure à celle des poutres simples et, par suite, de donner lieu à des efforts secondaires plus faibles que dans ces dernières.

D'autre part, les fermes à montants et croix de Saint-André possèdent un degré d'hyperstaticité *intérieure* très élevé, car celui-ci est égal au nombre de panneaux, si ces derniers sont tous à diagonales croisées. A titre d'exemple, le degré d'hyperstaticité intérieure de chacun des arcs du viaduc de Garabit est égal à 27, celui-ci comportant 27 panneaux à montants et croix de Saint-André. Il en résulte que le calcul exact de ce type de ferme est ardu : c'est d'ailleurs une des raisons de l'emploi plus rare de ces systèmes, à l'heure actuelle. Dans la suite, nous supposerons celles-ci isostatiques extérieurement, car on peut toujours ramener l'étude d'une ferme hyperstatique à celle de la même ferme rendue isostatique par une suppression convenable des liaisons.

La conception classique de la résolution hyperstatique du système est la suivante : si nous coupons une diagonale de chaque panneau et si nous appliquons, aux couples de lèvres des coupures, les efforts internes respectifs développés dans ces barres par la force extérieure unitaire, nous ramènerons le système à une ferme isostatique (*fig. 1*). Cette méthode conduit à écrire autant d'équations numériques qu'il y a de panneaux; il reste à les résoudre. S'il s'agit d'établir des

lignes d'influence, on devra résoudre autant de systèmes d'équations de ce genre qu'il y a de positions possibles de la force extérieure. La symétrie éventuelle de la ferme ne réduira pas la difficulté de résolution de chacun des systèmes d'équations. En effet, l'un quelconque de ces systèmes correspond à une position déterminée de la force extérieure unitaire mobile. Cette mise en charge particulière n'est en général pas symétrique. Par conséquent, malgré la symétrie de la ferme, les efforts dans deux barres symétriques sont différents. Il en résulte que cette symétrie n'amène aucune réduction du nombre d'inconnues de chacun des systèmes. Cette symétrie entraîne une simplification : il suffit de calculer les lignes d'influence des barres d'une des moitiés de la poutre, mais cette simplification a lieu quelle que soit la méthode de résolution de l'hyperstaticité de la ferme.

Pour établir les équations ainsi définies, certains auteurs [W. Ritter ⁽¹⁾] ont appliqué le principe des travaux virtuels, d'autres [L. Baes ⁽²⁾, L. Légens ⁽³⁾], le théorème de Castigliano. Léon Boyer ⁽⁴⁾ les a établies, à l'occasion de son calcul du viaduc de Garabit, en partant de la relation qui existe entre les dilatations des six barres d'un panneau. En outre, M. B. de Fontviolant ⁽⁵⁾ a appliqué l'« équation aux liaisons surabondantes » qu'il a établie à partir du principe des travaux virtuels. Ces auteurs sont ainsi arrivés nécessairement à une forme simple des équations, qui est due au choix des barres surabondantes et à la propriété suivante des poutres à montants et croix de Saint-André : l'effort interne dans la diagonale surabondante d'un panneau quelconque influence seulement les cinq autres barres du même panneau, *dans le système rendu isostatique* par coupure d'une diagonale dans chaque panneau. Il résulte de cette propriété que les équations de déformation se mettent sous la forme de relations linéaires

$$(i) \quad aX_{i-1} + bX_i + cX_{i+1} = d$$

(1) W. RITTER, *Anwendungen der Graphische Statik*, nach Prof. Dr C. Culmann, bearbeitet von W. Ritter, B. II, Zürich, 1890.

(2) L. BAES, *Cours de Stabilité des Constr. enseigné à l'Université de Bruxelles* (autographie), 1911.

(3) L. LÉGENS, *Génie Civil*, 1922 et 1933.

(4) LÉON BOYER, *Viaduc de Garabit sur la Truyère*, Paris, 1888.

(5) B. DE FONTVILANT, *Résistance des Matériaux Analytique et Graphique*, t. II, Paris, 1927; *Les Méthodes modernes de la Résistance des Matériaux*, Paris, 1920.

entre les efforts internes X_{i-1} , X_i et X_{i+1} dans trois diagonales surabondantes successives. Ces relations sont analogues aux équations bien connues des trois moments, ce qui facilite leur résolution. Elles ont d'ailleurs été appelées successivement *équations des trois tensions* par Léon Boyer, *équations des trois barres surabondantes* par M. L. Baes et *équations des trois efforts* par M. B. de Fontviolant.

W. Ritter et F. Bleich ⁽¹⁾ donnent une résolution intéressante du système d'équations des trois efforts, par approximations successives. Ils supposent, en première approximation, que, dans les équations telles que (i), a et c sont négligeables devant b et, en seconde approximation, substituent à X_{i-1} et X_{i+1} les valeurs tirées en premier lieu, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'erreur soit négligeable. D'autre part, W. Ritter expose un mode de résolution des systèmes à montants et croix de Saint-André par utilisation de l'ellipse d'inertie des panneaux, mais il reconnaît que la méthode est trop ardue et ne s'applique pratiquement qu'aux poutres droites. Il fait d'ailleurs l'hypothèse *restrictive* que les panneaux sont symétriques verticalement et horizontalement.

En outre, M. Farid Boulad ⁽²⁾ a donné une résolution de la formule des trois efforts par une méthode analogue à *celle des foyers* utilisée dans l'étude des poutres continues à l'aide de l'équation des trois moments.

Citons encore une méthode graphique très intéressante et originale due à M. L. Descans ⁽³⁾.

Enfin, Jean Résal ⁽⁴⁾ a proposé un mode de résolution approchée *des poutres droites*, en supposant qu'après déformation les panneaux, initialement rectangulaires, se transforment en parallélogrammes. Il a donné, en outre, une méthode approximative de calcul, basée sur la considération de la poutre comme système multiple formé de deux poutres isostatiques intérieurement. Il n'a cependant pas indiqué l'ordre de grandeur de l'approximation de cette méthode. Le *degré*

(1) F. BLEICH, *Der Statisch Unbestimmte Parallelträger mit Gekreuzten Diagonalen* (Osterr. Wochenschrift für den Öffentl. Baudienst, Heft 50, 1905).

(2) FARID BOULAD, *Un nouveau théorème pour calculer les tensions des barres surabondantes des poutres et arcs à montants et croix de Saint-André* (Comptes rendus du Congrès international des mathématiques, Strasbourg, 1920).

(3) L. DESCANS, *Le Calcul des Poutres à Diagonales Croisées* (Génie Civil, 3 juin 1922).

(4) J. RÉSAL, *Stabilité des Constructions*, Paris, 1901.

d'exactitude n'est donc pas défini, contrairement à ce que l'on fait d'habitude dans la plupart des problèmes d'hyperstaticité.

Au contraire, le procédé qui partirait d'une étude exacte et qui en déduirait un mode approché de calcul serait beaucoup plus sûr et plus logique. D'autre part, comme nous l'avons montré plus haut, le mode le plus simple de détermination exacte, établi jusqu'à présent, consiste dans l'utilisation d'équations du type (i) ci-dessus. Ces équations, qui ne sont autres que l'expression particulière des équations des dérivées du travail (Castigliano), restent malgré tout générales. Leur résolution subsiste : c'est seulement au cours de celle-ci qu'apparaissent les difficultés, la longueur et la complexité des calculs, qui sont de toute manière inhérentes à un système lui-même complexe. Il ne faut pas perdre de vue que ces équations ne s'appliquent qu'à une mise en charge fixée. Or, il est très rare que l'on puisse se passer du tracé des lignes d'influence, car on doit toujours, dans le calcul d'une ferme, rechercher pour chacune des barres en particulier la position du train de charge la plus défavorable. On s'en passera d'autant moins que la méthode nouvelle exposée dans le présent travail rend leur calcul aussi simple que l'étude d'une mise en charge fixée. Au contraire, le problème se complique précisément lorsqu'on veut établir, par la méthode précédente, les lignes d'influence des efforts principaux dans les barres de la ferme. Il faut en effet, dans ce cas, résoudre autant de systèmes d'équations qu'il y a de positions possibles des charges mobiles.

C'est pour cette raison que nous avons établi une méthode nouvelle, plus simple que les précédentes, bien qu'étant tout à fait rigoureuse. Nous avons surtout visé à la rendre pratique, tout en nous imposant comme but la détermination *directe*, à l'aide d'équations convenablement établies, de toutes les *ordonnées des lignes d'influence* des efforts principaux. La méthode par récurrence se présente, sans aucun doute, comme étant la meilleure voie à suivre pour les systèmes à montants et croix de Saint-André, en raison de leur haute hyperstaticité. D'autre part, le principe de réciprocité de Maxwell présente la propriété de réduire le degré d'hyperstaticité successivement d'une unité et paraît donc utilisable à cette fin.

Cependant, il n'est pas évident *à priori* qu'une pareille méthode soit possible, du moins pour la détermination des lignes d'influence. Mais nous l'avons rendue telle grâce à un choix judicieux des barres

surabondantes, en l'occurrence les montants. Nous verrons dans la suite, au cours de l'exposé, quelles sont les propriétés particulières de ceux-ci qui nous ont déterminés à faire ce choix.

Nous exposerons ainsi une méthode nouvelle d'application très simple, bien que les formules de récurrence que nous établirons sont tout à fait générales et peuvent être utilisées pour la résolution d'une ferme de forme quelconque.

Tout notre exposé aura pour but d'établir des équations dont l'application permet de calculer d'emblée les lignes d'influence des efforts principaux dans les barres. Il sera malgré tout ardu, pour deux raisons. Tout d'abord, il s'agit de la résolution exacte d'un système de degré d'hyperstaticité élevé. De toute façon, le problème sera donc complexe quelle que soit la méthode utilisée. *Ensuite et surtout, nous ne nous sommes pas borné à écrire, comme on l'a fait jusqu'à présent, des équations d'apparence très simple, mais trop générales, tirées du théorème de Castigliano, en laissant à l'ingénieur le soin de les résoudre chaque fois qu'il devra les appliquer.* C'est seulement au cours de cette application que naissent les plus grosses difficultés. Au contraire, nous nous sommes proposé d'éviter ces dernières en présentant la question des lignes d'influence *sous forme d'équations toutes résolues*. A cette fin, nous avons dû nécessairement nous astreindre à des calculs algébriques pénibles, mais ceux-ci ont le grand avantage d'être faits une fois pour toutes.

La complexité de l'exposé pourrait faire croire, à première vue, que la méthode actuelle n'est pas pratique. Il n'en est rien. Cette complexité résulte précisément du côté pratique que l'on a voulu donner à la méthode en effectuant certains calculs algébriques de façon à réduire au strict minimum les opérations que nécessite l'application du procédé. Il ne faut en effet jamais perdre de vue que toute méthode doit avant tout être établie pour être appliquée. Entre une méthode d'exposé simple, mais d'application difficile, et une méthode d'exposé complexe, mais d'application facile, l'ingénieur choisira sans hésiter la seconde.

La démonstration des formules constitue tout le côté ardu de l'exposé. Elle est, certes, intéressante, mais on pourrait très bien s'en passer, quitte seulement à connaître la signification des symboles algébriques qui entrent dans les formules et le mode d'application de celles-ci.

Si les travaux antérieurs sur le sujet sont d'exposé plus simple, ils sont par contre d'application plus difficile, car ils se bornent à présenter le problème sous forme de systèmes d'équations que l'ingénieur devra résoudre chaque fois qu'il s'en servira. Au contraire, l'application de la méthode actuelle ne nécessite plus aucun calcul algébrique. Elle se résume à des opérations tout à fait élémentaires, c'est-à-dire à la substitution, aux symboles algébriques qui interviennent dans les formules, de leurs valeurs numériques relatives à la forme particulière à résoudre. Ces opérations ne demandent même plus que des notions d'algèbre tout à fait rudimentaires. De plus, à l'heure actuelle, les calculs numériques ne présentent plus eux-mêmes aucune difficulté, grâce à l'emploi des machines à calculer.

Outre ces avantages, qui sont d'un grand intérêt pour l'ingénieur, la méthode actuelle présente encore le suivant. Les formules de récurrence qui seront établies ci-après donnent les ordonnées successives des lignes d'influence sous forme de sommations. Lorsque les termes de celles-ci sont de signes contraires, ils sont toujours très différents l'un de l'autre, de sorte que les erreurs relatives que le procédé entraîne sont très faibles.

Enfin, la méthode possède d'autres avantages tout aussi importants que les précédents. Ils seront exposés à la fin du deuxième chapitre. La méthode présente donc un réel intérêt.

Dans ce qui suit, nous exposerons tout d'abord, dans un premier chapitre, les principes et les méthodes qui seront utilisés au cours du présent travail.

Le deuxième chapitre consistera dans la résolution de la forme plane la plus générale des systèmes en treillis articulé à montants et croix de Saint-André. Cette résolution s'appliquera en particulier aux poutres droites du même type, que nous avons étudiées directement dans un travail précédent ⁽¹⁾.

On trouvera ensuite, dans un troisième chapitre, une application de la méthode à un arc particulier à montants et croix de Saint-André.

(1) *Étude des poutres à losanges et théorie des lignes d'influence des poutres droites en treillis à croix de Saint-André* (*Annales des Ponts et Chaussées*, novembre 1936, Paris).



CHAPITRE I.

PRINCIPES DE LA MÉTHODE ET PROCÉDÉS D'APPLICATION.

1. **Principes de la méthode.** - Au cours de notre étude, nous ferons un usage très fréquent du tracé de Cremona, du tracé de Williot, ainsi que du principe de superposition, du principe de Maxwell et du principe des travaux virtuels.

a. Le tracé de Cremona consiste en une détermination graphique des efforts normaux dans les barres des systèmes plans triangulés à attaches supposées articulées. La méthode que nous allons exposer est beaucoup plus pratique que celle employée en général par les ingénieurs, car elle fournit automatiquement le sens des efforts normaux dans toutes les barres (¹).

Soit par exemple (*fig. 2, a*) une ferme plane triangulée présentant en A un appui à rotule et en E, un plan d'appui quelconque. Cette ferme est isostatique extérieurement, mais rien n'empêche d'appliquer la méthode de Cremona aux systèmes hyperstatiques extérieurement, pourvu que l'on ait déterminé à l'avance, par un procédé quelconque, toutes les liaisons extérieures résultant de la sollicitation extérieure donnée.

Dans la poutre (*fig. 2, a*), la réaction en R_E est normale à la trace du plan d'appui. Si l'on prolonge sa ligne d'action jusqu'à l'intersection i de celle-ci avec la ligne d'action de la force extérieure P, la ligne d'action de la réaction R_A n'est autre que Ai . On peut dès lors déterminer R_A et R_E en décomposant P suivant leurs deux directions. Cette décomposition est d'ailleurs effectuée dans la figure 2, *b*, que nous allons examiner.

(¹) La présente méthode est exposée par M. le professeur H. Béghin dans son Cours de Résistance des Matériaux à l'Université de Paris.

Connaissant R_A et R_E , on peut tracer la figure de Cremona (*fig. 2, b*) comme suit. Divisons d'abord le plan de la poutre (*fig. 2, a*) en six régions (1, 2, 3, 4, 5, 6) séparées par les lignes d'action des forces extérieures P , R_A et R_E et les barres de la construction, celles-ci figurant aussi, implicitement, les lignes d'action des forces internes qui les sollicitent.

Cela étant, exprimons graphiquement et successivement l'équilibre des divers nœuds de la poutre en commençant par un nœud ne présentant que deux barres dont les efforts internes sont inconnus, par exemple le nœud E. A cette fin, imposons-nous, pour tous les nœuds, un seul et unique sens de rotation fixant l'ordre dans lequel nous couperons, autour du nœud, les droites-frontières des diverses régions. Dès que l'on coupera une de ces droites-frontières, on tracera dans la figure (*b*) de Cremona une droite parallèle à cette droite-frontière, qui représente en grandeur, direction et sens, l'effort extérieur ou intérieur agissant suivant la droite-frontière coupée.

On opérera par exemple comme suit : si l'on coupe d'abord R_E , on trace, en (*b*), à l'échelle des forces choisie pour le tracé de Cremona, le segment $\overrightarrow{2-1}$ parallèle à R_E et représentant cette réaction. L'ordre de numérotation des extrémités de ce segment est le même que celui dans lequel les régions 2 et 1 sont successivement rencontrées. En outre, cet ordre indique en même temps le sens d'action, sur le nœud considéré, de l'effort extérieur ou intérieur correspondant. Si nous continuons le tracé de l'équilibre du nœud E, nous coupons ensuite la barre b en passant de la région 1 à la région 4, puis la barre a en passant de la région 4 à la région 2. Nous tracerons donc dans la figure 2 (*b*) successivement les segments $\overrightarrow{1-4}$ et $\overrightarrow{4-2}$ parallèles à b et à a . Il en résulte que la barre b subit une traction (1-4) et la barre a , une compression (4-2). En effet, $\overrightarrow{1-4}$ s'écarte du nœud E, donc tire sur celui-ci, tandis que $\overrightarrow{4-2}$ s'en rapproche, donc pousse sur le même.

Passons ensuite au nœud D d'application de P . Coupons les droites-frontières dans le sens P , a , c , d , en passant successivement des régions 3 à 2, 2 à 4, 4 à 5 et 5 à 3. Nous tracerons donc successivement dans la figure (*b*) de Cremona les parallèles $\overrightarrow{3-2}$, $\overrightarrow{2-4}$, $\overrightarrow{4-5}$ et $\overrightarrow{5-3}$ représentant, à l'échelle, la force extérieure P et les forces normales dans les barres a , c , d , avec leur sens. On fera ensuite des coupures

successives autour des nœuds C, B, A et l'on tracera dans la figure de Cremona les contours fermés correspondants (5-4-1-6-5), (3-5-6-3) et (3-6-1-3) donnant les efforts dans les barres, avec leur signe. Le segment $\overrightarrow{1-3}$ représente en particulier la réaction R_A avec son signe.

On voit que les deux figures 2, *a* et *b* sont des figures conjuguées réciproques : à une région de la figure (*a*) de la poutre correspond un point de la figure (*b*) de Cremona, tandis qu'à un nœud de la première correspond une région de la seconde.

On voit que la construction de la figure de Cremona est automatique, progressive et ne présente aucune difficulté, pourvu que, en chacun des nœuds considérés, il ne reste pas plus de deux inconnues à déterminer.

b. Le tracé de Williot est un procédé graphique original, imaginé par l'ingénieur français Williot, de détermination de la figure déformée d'une construction réticulaire, à partir des déformations longitudinales des barres, calculées au préalable.

Considérons tout d'abord trois nœuds A, B, C d'une ferme reliés par les barres *a*, *b*, *c* (*fig. 3, a*). Supposons que nous ayons déjà déterminé les positions nouvelles A' et B' de A et B, après déformation de la ferme et soient λ_b et λ_c les déformations longitudinales de *b* et *c*, λ_b étant par exemple un allongement et λ_c , un raccourcissement. Portons CC₁, CC₂, C₁C₁' et C₂C₂' équipollents respectivement aux déplacements Δ^A , Δ^B et aux déformations longitudinales λ_b et λ_c . La nouvelle position C' de C se détermine en décrivant, de A' et B comme centres, des arcs de cercles de rayons ($b + \lambda_b = A'C_1''$) et ($c + \lambda_c = B'C_2''$). Mais Δ^A , Δ^B , λ_b , λ_c , C₁'C' et C₂'C' sont des infiniment petits par rapport à *b* et *c*. Ce sont en effet des déformations et des déplacements qui sont toujours excessivement petits vis-à-vis des dimensions de la construction. Pour les constructions métalliques en acier ordinaire, par exemple, les déformations longitudinales des barres sont de l'ordre du 2000^e de la longueur de celles-ci. Il en résulte que les arcs de cercles précités se confondent avec les normales à *b* et *c*, élevées en C₁' et C₂'.

On peut, d'autre part, remplacer très avantageusement la figure 3 (*a*) par la figure 3 (*b*) où le point ABC figure la position initiale du triangle ABC avant toute déformation de la ferme. On voit que Δ^c est mesuré en grandeur, direction et sens à partir de ce point. Il en

résulte que ABC figure la position non déformée de *toute la ferme*. La figure 3 (*b*) constitue le « tracé de Williot ». Elle a le grand avantage de réduire fortement le travail en se débarrassant du tracé des barres de la ferme et ne retenant que les déformations successives. En outre, elle permet de faire le tracé à une échelle plus grande que celle de la représentation de la construction et, ainsi, de donner lieu à une plus grande précision.

Considérons ensuite une ferme complète, par exemple la ferme de la figure 2 (*a*), sollicitée par la force extérieure P. Nous avons déterminé, à l'alinéa *a*, à l'aide d'un tracé de Cremona, les efforts internes dans toutes les barres, qui sont des compressions ou des tractions longitudinales. Les barres comprimées sont représentées en traits renforcés. Nous pourrions déduire du tracé de Cremona les raccourcissements ou allongements longitudinaux de toutes les barres.

Ces déformations vont nous permettre de faire le tracé de Williot (*fig. 2, c*). Nous rapporterons tout d'abord les déplacements à une direction et à un point arbitrairement choisis et supposés fixes, quitte à faire après coup les corrections nécessaires. Nous choisirons en l'occurrence la direction de la barre *f* et le point A, qui reste fixe. Soit donc $O \equiv ABCDE$ le point du tracé de Williot qui figure la position initiale non déformée de la ferme. Le point A étant fixe, ne subit aucun déplacement. Sa position finale A' coïncide avec O. Portons à partir de O le raccourcissement λ_f de la barre *f*, parallèlement à celle-ci. Comme elle est comprimée, le nœud B se rapproche du nœud A. Dans la figure (*c*), on doit donc porter λ_f dans le sens indiqué. On trouve ainsi la position B' de B après déformation de la ferme.

Pour obtenir la nouvelle position C' de C, on remarquera que le nœud C est relié aux nœuds A et B, dont on possède les positions nouvelles, par les barres *g* et *e*. On portera donc à partir de A' le raccourcissement λ_g de la barre comprimée *g* et, à partir de B', l'allongement λ_e de la barre tendue *e* dans les sens qui indiquent que C se rapproche de A et s'écarte de B. Aux extrémités des segments λ_g et λ_e , on élèvera des perpendiculaires sur ceux-ci, qui se coupent en C', position nouvelle de C. De même, pour obtenir D', on porte λ_d à partir de B' et λ_c à partir de C' et l'on élève les normales à λ_d et λ_c , qui se coupent en D'. Finalement, on trouvera E' en traçant λ_a en D', λ_b en C' et en élevant les perpendiculaires à ces déformations.

Les déplacements de tous les nœuds de la ferme s'obtiennent en grandeur, direction et sens en joignant l'origine $O \equiv ABCDE$ du diagramme de Williot aux positives finales, $A'B'C'D'E'$ de ces nœuds après déformation de la ferme. En portant ces déplacements aux nœuds mêmes de la ferme, on aura la position déformée de celle-ci.

Pour tracer la figure de Williot, nous l'avons rapportée à une direction arbitraire AB supposée fixe. Or celle-ci subit elle-même une rotation autour de A . Pour déterminer la correction qui en résulte pour le tracé de Williot, remarquons que le nœud E ne peut que se déplacer sur la trace de son plan d'appui $\overline{pq}$. Par conséquent, dans le tracé (c) de Williot, la position réelle de E après déformation de la poutre doit se trouver sur la parallèle OF à $\overline{pq}$, menée par l'origine. Il n'en est rien : E' ne se trouve pas sur cette parallèle. D'après le diagramme de Williot, il se trouve au-dessus du plan d'appui $\overline{pq}$ (*fig. 2, a*). Le point A étant fixe, il suffira donc, pour corriger le tracé de Williot, de faire subir à toute la ferme une rotation d'ensemble ω autour de ce point, dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre. Dans ce mouvement, le nœud E se déplace normalement à la ligne AE des appuis, car la rotation ω est infiniment petite. Pour trouver, dans le tracé de Williot, la nouvelle position de E , on mènera donc EE'' perpendiculaire à la droite AE des appuis (*fig. 2, a*) jusqu'à sa rencontre avec la parallèle à $\overline{pq}$ menée à partir de l'origine de la figure (c) . La rotation ω aura pour valeur

$$\omega = \frac{\overline{E'E''}}{l},$$

si l est la distance des appuis de la ferme. Du fait de cette rotation ω de correction, un nœud quelconque de la construction, D par exemple, subira un déplacement supplémentaire $D'D''$ (*fig. 2, c*) normal à la direction AD (*fig. 2, a*) et égal à

$$\overline{D'D''} = m\omega = \frac{m}{l} \overline{E'E''}.$$

où m est la distance $\overline{AD}$ (*fig. 2, a*). Les corrections des déplacements des autres nœuds se déduisent de même.

Celles-ci peuvent se déterminer graphiquement à l'aide d'un tracé de Williot, comme suit : si nous menons $\overline{E''D''}$ et $\overline{E'D''}$ (*fig. c*)

normaux respectivement à $\overline{ED}$ et $\overline{AD}$ (*fig. a*), les deux triangles ADE (*fig. a*) et $E'E''D'''$ (*fig. c*) sont semblables. On a donc

$$\frac{\overline{E'D'''}}{\overline{E'E''}} = \frac{\overline{AD}}{l} = \frac{m}{l};$$

d'où

$$\overline{E'D'''} = \frac{m}{l} \overline{E'E''} = \overline{D'D''}.$$

On trouverait de même $\overline{B'B''}$ en grandeur, direction et sens, en $\overline{E'B''}$ en traçant $\overline{E'B''}$ et $\overline{E''B''}$ normaux respectivement à $\overline{AB}$ et $\overline{BE}$ (*fig. a*), et ainsi de suite.

Finalement, on aura donc en $\overline{OB''}$, $\overline{OC''}$, $\overline{OD''}$ et $\overline{OE''}$ les déplacements réels des nœuds de la ferme. Si l'on reporte ces déplacements sur la figure (*a*), à l'échelle de celle-ci, on trouvera la position déformée de la poutre.

La ferme que nous avons choisie pour notre exposé est une ferme triangulée, isostatique extérieurement. Cependant, le tracé de Williot s'applique à toutes espèces de constructions, qui peuvent être hyperstatiques extérieurement et intérieurement, à condition que l'on ait, au préalable, déterminé d'une manière tout à fait rigoureuse toutes les liaisons extérieures et les efforts internes dans toutes les barres. En effet, si l'on fait le tracé de Williot pour ces poutres hyperstatiques, ce tracé doit satisfaire à autant de vérifications qu'il y a d'éléments surabondants. Le tracé de Williot peut d'ailleurs être effectué indépendamment de ces derniers. Par conséquent, il doit vérifier, au droit des liaisons extérieures surabondantes, les déplacements de celles-ci, nuls (liaisons fixes) ou non (appuis élastiques), et, au droit des barres surabondantes, les déformations longitudinales de celles-ci.

Il en serait ainsi notamment des fermes à montants et croix de Saint-André, que nous étudierons dans le chapitre suivant.

Pour plus de détails sur le tracé de Williot, on se reportera utilement au travail original de cet auteur ⁽¹⁾.

c. Le principe de superposition suppose que l'on reste dans les limites de validité de la loi de Hooke. Il n'est en effet applicable que

(1) WILLIOT, *Notations pratiques sur la statique graphique* (Publications scientifiques industrielles, 1877).

si l'on se place dans l'hypothèse habituelle de la résistance des matériaux, c'est-à-dire la proportionnalité des déformations quelconques aux forces appliquées. Cette hypothèse est une forme particulière et restreinte de l'hypothèse de l'élasticité, dans laquelle on néglige tout effet des déformations sur l'équilibre élastique.

Ces hypothèses sont suffisamment valables, ainsi que l'expérience l'a généralement prouvé, à condition que les déformations soient réellement très petites et que les barres comprimées soient absolument garanties contre le flambage.

d. On sait que le *principe de réciprocité de Maxwell* ⁽¹⁾ résulte de la considération de deux groupes de sollicitations appliquées successivement à une même construction. Il exprime que le travail *virtuel* des sollicitations du premier groupe le long des déformations qu'impriment à leurs points d'application les sollicitations du second groupe, est égal au travail *virtuel* des sollicitations du second groupe, le long des déformations qu'impriment à leurs points d'application les sollicitations du premier groupe.

L'application de ce principe à la détermination des efforts ou couples de liaison est classique. La méthode s'est surtout répandue dans la recherche des lignes d'influence des réactions et des moments de flexion des poutres droites continues, ainsi que dans la recherche des lignes d'influence des liaisons des arcs. Citons tout particulièrement son emploi aux constructions hyperstatiques du premier degré, qu'elle a la propriété de rendre isostatiques, grâce à une coupure par rapport à l'élément surabondant étudié. Il en est ainsi notamment des réactions des poutres continues sur trois appuis et de la poussée d'un arc à deux rotules. La méthode conduit à une représentation intuitive des lignes d'influence. Cette représentation fait image en ce sens qu'elle est une expression mécanique du mode de comportement de la construction considérée, sous l'influence de la sollicitation que l'on étudie. La méthode a d'ailleurs donné naissance à l'emploi de procédés mécaniques à l'aide d'appareils d'application extrêmement simple (« micro-influentiomètre » de M. Magnel, appareil de MM. Land et Beggs, « influentiographe » de M. Colonetti, appareil « Nupubest » de M. Rieckhoff, méthode de M. Wahed, etc.).

⁽¹⁾ J.-CL. MAXWELL, *Traité d'Électricité*, Chap. III : Travail électrique et Énergie d'un système de conducteurs.

L'application du principe de réciprocité de Maxwell aux systèmes en treillis est également connue, mais très peu répandue. Elle peut cependant être d'un très grand intérêt, car elle a l'avantage d'être très simple et de réduire d'une unité le degré d'hyperstaticité du treillis étudié. Nous ne l'emploierons, dans le présent travail, que dans le cas des treillis articulés.

Comme la méthode peut comporter des modalités de détail, nous expliquerons ci-après le procédé choisi, afin de préciser la terminologie, les notations et les conventions de signes employées dans notre exposé. Notons tout d'abord que *nous adopterons*, dans la suite, *les compressions internes des barres comme positives*. Si l'on adoptait les tractions internes comme positives, on obtiendrait d'ailleurs un raisonnement en tous points analogue au suivant.

Cela étant, coupons la barre s de la poutre figure 4 (a) et supposons la force extérieure mobile P appliquée en un nœud p arbitraire. L'application de P produit par exemple un « écartement » ⁽¹⁾ relatif translatore $P \delta_p^s$ des lèvres de la coupure de la barre s , dans la direction de cette dernière, δ_p^s résultant de $P = 1$. Le résultat final de la démonstration suivante serait le même si l'on supposait que δ_p^s est un « rapprochement » ⁽¹⁾. Si l'on voulait maintenir les deux lèvres de la barre s en contact, comme avant la coupure de celle-ci, il faudrait appliquer en ces lèvres des compressions S, S , qui ne sont autres que les *compressions* internes développées par P dans cette même barre lorsque celle-ci n'est pas coupée. Nous nous proposons de calculer ces forces internes S .

Pour cela, considérons (*fig. 4, b*) la même poutre soumise cette fois à des tractions k des lèvres de la coupure. Elles produisent un déplacement relatif $k \Delta_s^s$ de ces lèvres dans le sens d'action des forces k , autrement dit un *rapprochement*, et un déplacement du point d'application de P dont $k \delta_s^p$ est la projection sur la *direction* initiale de P .

Il est à noter que, dans les figures 4 (a et b), on ne peut faire agir la force P d'une part, les forces k d'autre part, que si le système reste

⁽¹⁾ Nous appelons *écartement* ou *rapprochement* relatif des lèvres de la coupure d'une barre quelconque, un déplacement relatif de ces lèvres de même sens que celui qui résulterait, respectivement, d'un écartement ou d'un rapprochement des nœuds d'extrémités de la même barre.

indéformable après coupure de la barre s , sinon ce système se déformerait indéfiniment sous des efforts extérieurs quelque petits qu'ils soient. On ne peut donc appliquer le principe de réciprocité de Maxwell que dans cette hypothèse.

Δ_s^S est essentiellement positif, tandis que δ_s^P sera mesuré positivement dans le sens de P , mais contiendra implicitement son signe.

Appliquons le principe de Maxwell aux deux systèmes (a) et (b) de *forces* et de *déplacements* :

$$P(k\delta_s^P) = -k(P\delta_s^S)$$

ou

$$\delta_s^P = -\delta_s^S.$$

D'autre part, S est tel que le déplacement relatif total des lèvres de la coupure, dans la poutre sollicitée par P , S , S , est nul. On a donc

$$P\delta_s^S + S\Delta_s^S = 0.$$

On déduit de ces deux dernières équations

$$(a) \quad S = P \frac{\delta_s^P}{\Delta_s^S} = P \frac{k\delta_s^P}{k\Delta_s^S}.$$

A noter que $k\delta_s^P$ et $k\Delta_s^S$ sont des déplacements produits tous deux par les deux tractions k des lèvres de la coupure de la barre s (*fig. 4, b*).

L'équation (a) est vraie quel que soit le nœud d'application de la force extérieure P , que nous pouvons donc supposer mobile et appliquée aux nœuds successifs de la construction. On peut par conséquent en déduire le procédé suivant d'application du principe de Maxwell à la détermination de la ligne d'influence de l'effort normal S dans la barre quelconque s .

On coupe la barre s et l'on applique aux lèvres de la coupure deux tractions k arbitraires, mais égales et opposées, si l'on considère les *compressions* internes comme positives (¹). On en déduit, à l'aide d'un tracé de Cremona ou de toute autre méthode équivalente, les efforts internes dans toutes les autres barres dus aux tractions k et, ensuite, les déformations longitudinales de ces barres. A l'aide de ces

(¹) Si l'on considérait les tractions internes comme positives, on appliquerait aux deux lèvres de la coupure de s deux *compressions* k égales et opposées.

déformations longitudinales, on détermine graphiquement ou analytiquement, par un tracé de Williot, par le théorème des dérivées du travail (Castigliano) ou par toute autre méthode équivalente, la déformée de toute la poutre et, en particulier, les déplacements des nœuds d'extrémités de la barre s coupée. La ligne d'influence cherchée de l'effort normal de compression dans la barre s n'est autre que la mesure, à l'échelle du *rapprochement* $k \Delta s$ des lèvres de la barre s , de la projection de la déformée ainsi obtenue, sur les lignes d'action successives éventuelles de la force extérieure mobile P , si celle-ci est supposée prise égale à l'unité des forces.

Ce procédé est applicable, non seulement lorsque la force extérieure mobile $P = 1$ est appliquée aux nœuds, mais aussi lorsqu'elle est appliquée en un point quelconque des barres, entre ces nœuds. La position déformée des barres, sous l'effet des tractions k , étant rectiligne, les lignes d'influence des efforts internes dans les barres seront donc constituées, entre leurs ordonnées correspondant aux nœuds, de segments de droites reliant ces ordonnées.

Pour faciliter la compréhension de l'exposé du Chapitre II ci-après, il est intéressant d'écrire en abrégé, sous les formes littérales suivantes, l'expression de la propriété des lignes d'influence (L. I.) déduite du principe de Maxwell

$$\text{L. I.} \doteq \frac{\text{déformée}}{\text{rapprochement des lèvres}}$$

ou

$$(1') \quad \text{Déformée} = (\text{L. I.}) \times (\text{rapprochement des lèvres}).$$

Nous verrons ci-dessous, au cours de l'exposé du mode d'application du principe des travaux virtuels, que les deux formules (1) et (1') sont aussi valables pour les systèmes qui deviennent déformables après coupure de la barre dont on détermine la ligne d'influence.

Toutes les considérations précédentes s'appliqueraient intégralement à une barre quelconque d'un système isostatique ou hyperstatique intérieurement ou extérieurement, à la seule condition que le système reste indéformable par suppression de la barre considérée.

En outre, il est à noter que le principe de Maxwell n'est applicable que pour autant que les déformations et déplacements envisagés soient très petits par rapport aux dimensions de la ferme. C'est d'ailleurs ce qui a lieu dans la plupart des constructions utilisées dans la pratique.

Remarque. — Les deux efforts de traction k , égaux et opposés, appliqués aux lèvres de la barre s , font naître des efforts internes dans toutes les autres barres de la ferme. Il résulte des déformations de celles-ci un *rapprochement* $k \Delta_s^S$ des *nœuds d'extrémités* de la barre coupée. Comme, en outre, les deux tractions k produisent un allongement $\frac{kl}{E\sigma}$ de la barre, le déplacement relatif des deux lèvres de la coupure s'écrit

$$(2) \quad k \Delta_s^S = k \Delta_s^{S'} + \frac{kl}{E\sigma},$$

où l , σ et E sont respectivement la longueur, la section transversale et le coefficient d'élasticité longitudinale de la barre.

e. Principe des travaux virtuels. — Nous venons de voir que le principe de réciprocité de Maxwell n'est applicable qu'aux treillis qui restent indéformables après coupure de la barre étudiée. Considérons à présent un système isostatique ou hyperstatique, non déformable initialement, mais qui le devient par coupure de la barre s dont nous recherchons la ligne d'influence de l'effort normal (*fig. 5, a*).

Comme nous l'avons dit plus haut, nous adopterons les compressions internes des barres comme positives.

Coupons la barre s et appliquons aux deux lèvres de la coupure les deux *compressions* S qui font équilibre à P . S n'est autre que l'effort interne développé par P dans la ferme dont la barre s n'est pas coupée.

L'application pure et simple du principe de Maxwell (voir *fig. 4, b*) conduirait dans le cas actuel à une déformation indéfinie, la poutre étant déformable.

Nous pouvons au contraire établir comme suit un procédé d'application du principe des travaux virtuels.

Supprimons les forces P , S , S (*fig. 5, b*) et produisons un rapprochement virtuel Δ^S des lèvres de la coupure de la barre s . Insistons tout spécialement sur le fait que les déplacements virtuels doivent être des *infinitement petits* par rapport aux dimensions longitudinales des barres. Il résulte de Δ^S un déplacement virtuel du point d'application p , dont la projection sur la direction de P est égale à δ^p mesuré positivement *dans le sens de* P . Δ^S et δ^p étant infiniment petits et compatibles avec les liaisons extérieures, le travail virtuel des forces extérieures P , S et S en équilibre sur le système, le long de ces

déplacements virtuels, est nul; autrement dit

$$P\delta^p - S\Delta^s = 0;$$

d'où

$$(\beta) \quad S = P \frac{\delta^p}{\Delta^s}.$$

Cette équation est analogue à l'équation (α). Elle est vraie aussi en tous les nœuds d'application éventuels de P. Par conséquent, on obtiendra la ligne d'influence de l'effort normal dans la barre s par application du principe des travaux virtuels, en coupant la barre s étudiée, en produisant un *rapprochement* virtuel Δ^s infiniment petit de ses lèvres et en mesurant, à l'échelle de ce rapprochement virtuel, la projection δ^p de la déformée virtuelle qui en résulte, sur les lignes d'action successives éventuelles de la force extérieure mobile P supposée égale à l'unité. Cette projection, mesurée positivement dans le sens de P, exprimera des compressions dans la barre s . Entre les ordonnées correspondant aux nœuds, les lignes d'influence seront encore formées de segments de droites joignant les ordonnées au droit des nœuds.

On voit qu'il y a analogie complète entre le principe de réciprocité de Maxwell et le principe des travaux virtuels. Les équations littérales (1) et (1') sont donc applicables à tous les systèmes en treillis. On notera cependant qu'ici, les forces P, S, S correspondent bien à un état de sollicitation en équilibre, tandis que δ^p et Δ^s appartiennent à un état de déplacement quelconque, pourvu qu'il soit compatible avec les liaisons du système. On voit aussi que le rapport $\frac{\delta^p}{\Delta^s}$ a une valeur bien déterminée, car le système n'a qu'un seul degré de liberté.

f. Comparaison du principe de réciprocité de Maxwell et du principe des travaux virtuels. — On peut montrer que l'application du principe de Maxwell peut s'étendre aux constructions en treillis qui deviennent déformables par coupure de la barre étudiée (*fig. 5, a*). En effet, la déformation (δ^p , Δ^s) se produit sans qu'il soit nécessaire de développer aucun effort (*fig. 5, b*). Le second groupe de forces, analogue à celui de la figure 4 (*b*), se réduit donc à zéro. Il ne subsiste de ce groupe que les déplacements Δ^s et δ^p infiniment petits. Le

principe de réciprocité de Maxwell s'exprime comme suit :

$$P \delta^P - S \Delta^S = (\text{forces du second groupe} = 0) \\ \times (\text{déplacements dus au premier groupe} \neq 0)$$

ou

$$P \delta^P - S \Delta^S = 0.$$

La propriété du principe de Maxwell, annoncée ci-dessus, se trouve par là démontrée.

Réciproquement, le principe des travaux virtuels est applicable aux systèmes en treillis qui restent indéformables par coupure de la barre étudiée, à condition de l'appliquer au groupe de forces P, S et S qui maintiennent la construction dans le même état d'équilibre que l'état initial, avant coupure de la barre, c'est-à-dire tel que les lèvres de la coupure de la barre restent en contact. En effet, si l'on produit un *rapprochement* virtuel Δ_s^S des lèvres de la coupure de la barre *s*, il en résultera nécessairement un déplacement virtuel δ_s^P compatible avec Δ_s^S et avec les liaisons de la ferme (*fig. 4, b*). Dès lors, si l'on applique le principe des travaux virtuels à ces déplacements virtuels et aux forces P et S en équilibre, on aura directement

$$P \delta_s^P - S \Delta_s^S = 0,$$

relation qui donne immédiatement l'équation (α) et démontre la propriété annoncée.

En conclusion, on voit que le principe de réciprocité de Maxwell et le principe des travaux virtuels ne font qu'un seul et même principe, que l'on peut indifféremment appliquer à tous les systèmes initialement indéformables. Le principe de Maxwell n'est, somme toute, qu'un cas particulier du principe des travaux virtuels qui, lui, est tout à fait général.

Dans les deux cas, on arrive à la même formule (1) ou (1'). La ligne d'influence de l'effort normal de compression dans une barre quelconque sera donc toujours figurée, à l'échelle du *rapprochement* des lèvres de la barre supposée coupée, par la déformée de la construction produite par ce rapprochement des lèvres de la coupure de la barre, et cette ligne d'influence, pour laquelle on prendra comme *figure de référence* la position initiale de la construction non déformée, sera valable quels que soient les points d'application, les directions et les sens de la force extérieure mobile $P = 1$, à condition

que l'on mesure les déplacements projetés sur les directions des forces extérieures, positivement dans le sens de celles-ci.

2. Procédés d'application, aux systèmes extérieurement isostatiques, des méthodes exposées ci-dessus. — Nous nous bornerons à l'étude des systèmes isostatiques extérieurement. Le calcul des lignes d'influence des liaisons extérieures surabondantes des systèmes hyperstatiques extérieurement peut d'ailleurs s'effectuer très aisément dès que l'on a établi les lignes d'influence des efforts normaux dans toutes les barres du système rendu isostatique extérieurement par suppression des liaisons surabondantes extérieures.

En effet, ce calcul se fera par exemple comme suit : On remplacera les liaisons extérieures par les réactions correspondantes, provisoirement inconnues, en rendant ainsi la construction isostatique extérieurement. Sous l'effet de ces réactions de liaisons, il naît dans toutes les barres de la ferme des efforts normaux que l'on peut déduire directement des lignes d'influence de ces derniers, qui sont déjà établies. L'application du théorème des dérivées du travail (théorème de Castigliano) permettra ensuite, en exprimant les conditions des liaisons, par exemple la fixité de celles-ci, d'obtenir autant d'équations qu'il y a de réactions surabondantes. On pourra donc déterminer les valeurs de celles-ci pour chacune des positions de la force extérieure mobile. En d'autres termes, on aura leurs lignes d'influence.

Une fois celles-ci déterminées, on corrigera les lignes d'influence des efforts normaux dans toutes les barres de la ferme en ajoutant à ces dernières les lignes d'influence des efforts normaux internes dus aux réactions de liaison.

Les lignes d'influence des réactions de liaisons peuvent aussi se déterminer en appliquant le principe de réciprocité de Maxwell ou le principe des travaux virtuels, de la même manière que les lignes d'influence des efforts normaux dans les barres des systèmes en treillis. Cette méthode est tout spécialement intéressante lorsque la ferme n'est hyperstatique extérieurement que du premier degré, car le principe de Maxwell et le principe des travaux virtuels ont, dans ce cas, la propriété de ramener l'étude de la ferme au cas d'une ferme isostatique extérieurement.

Pour déterminer la ligne d'influence de la seule réaction extérieure

surabondante, pour laquelle on se fixera un sens positif, il suffira de rendre la ferme isostatique extérieurement par la suppression de la liaison surabondante, de supprimer en plus la réaction de cette dernière et d'appliquer, au contraire, au nœud où elle agissait et sur la ferme dépourvue de toute sollicitation, une force k de même direction, mais *de sens opposé*. Les lignes d'influence des efforts normaux dans les barres de la construction rendue isostatique, qui sont supposées déterminées, nous donneront directement, pour cette sollicitation, les efforts internes et, par suite, les déformations longitudinales de toutes ces barres. Un tracé de Williot, affecté des corrections dues au retour de la ferme sur ses appuis, après déformation, ou bien le théorème de Castigliano, fournira ensuite la déformée de toute la ferme et, en particulier, la composante du déplacement du point d'application de la force k dans la direction et *le sens* de celle-ci. Cette composante sera essentiellement positive. La projection, sur les lignes d'action éventuelles de la force extérieure mobile $P = 1$, de la déformée ainsi obtenue, mesurée à l'échelle de cette composante, n'est autre que la ligne d'influence de la réaction calculée, *avec son signe*, si l'on mesure la projection de la déformée positivement dans le même sens que celui de la force extérieure mobile $P = 1$.

On voit donc qu'il faut tout d'abord étudier les fermes en treillis en les supposant rendues isostatiques extérieurement, quitte après coup à étudier l'effet des liaisons surabondantes. Nous ne considérons donc ci-après que les systèmes *isostatiques extérieurement*, pour lesquels nous donnerons les procédés d'application du principe de Maxwell et du principe des travaux virtuels.

Toutefois, si le système devient déformable par suppression de toutes les liaisons extérieures surabondantes, il faudra évidemment garder, pour le calcul de la ligne d'influence d'une barre quelconque, les liaisons extérieures surabondantes qui sont nécessaires pour assurer *l'indéformabilité* de la ferme *avant coupure* de la barre quelconque étudiée. Ce cas peut se présenter lorsque la ferme est hypostatique intérieurement ou présente un panneau à travers lequel une section ne coupe que une ou deux barres. C'est pourquoi nous n'envisagerons, dans la discussion ci-dessous, que les fermes isostatiques extérieurement, mais qui sont, en plus, au moins isostatiques intérieurement et ne présentent aucun panneau qu'une section pour-

rait couper en rencontrant moins de trois barres. Les autres dispositions *des barres* ne sont guère utilisées dans la pratique. Leur étude serait d'ailleurs rendue très aisée par l'application du principe de Maxwell ou du principe des travaux virtuels.

a. Systèmes intérieurement isostatiques et indéformables. — Les lignes d'influence des efforts intérieurs dans toutes les barres peuvent s'obtenir par coupure successive de chaque barre et déformation cinématique infiniment petite de chacun des systèmes déformables obtenus après les coupures.

Les éléments intéressants d'une déformée s'obtiennent par le tracé d'un diagramme de Williot, sa correction éventuelle (due au fait que, dans certains cas, il faut ramener la poutre déformée sur ses appuis) et sa projection sur les lignes d'action possibles des forces extérieures.

La méthode est ainsi basée sur le principe des travaux virtuels. Elle devient particulièrement utile dans les treillis à losanges, pour lesquels les méthodes ordinaires conduiraient à des difficultés particulières.

b. Systèmes articulés hyperstatiques du premier degré et indéformables. — Les lignes d'influence des efforts principaux dans toutes les barres peuvent de nouveau s'obtenir par coupure successive de chaque barre et déformation infiniment petite de chacun des systèmes obtenus après les coupures. Si ce dernier est déformable, on est ramené identiquement au cas précédent. S'il reste indéformable, on le déformera élastiquement, suivant la méthode dérivée du principe de Maxwell, exposée ci-dessus, et l'on déterminera les éléments intéressants de la déformée par le tracé d'un diagramme de Williot ou par toute autre méthode équivalente.

c. Systèmes articulés hyperstatiques du second degré et indéformables. — Si l'on coupe l'une des deux barres surabondantes, on est ramené à l'étude d'un système hyperstatique du premier degré.

Supposons déterminées toutes les lignes d'influence de ce dernier. On en déduira directement les efforts intérieurs et les déformations longitudinales des barres qui sont développés par deux tractions égales et opposées des deux lèvres de la coupure de la barre surabondante étudiée, tractions qui sont nécessaires pour déformer élasti-

quement la ferme hyperstatique du premier degré. On déterminera ensuite la déformée et, par suite, la ligne d'influence de l'effort intérieur dans la barre surabondante coupée, par exemple à l'aide d'un tracé de Williot. Une fois connue cette ligne d'influence, on tiendra compte de ses effets sur les lignes d'influence de toutes les autres barres.

Quant aux lignes d'influence des efforts normaux dans toutes les barres qui appartiennent à un panneau isostatique, dans lequel une section ne rencontre que trois barres, elles s'obtiendront plus simplement, comme au paragraphe *a*, en appliquant le principe des travaux virtuels.

d. Systèmes articulés hyperstatiques de degré plus élevé. — On peut, par la même méthode que celle du paragraphe *c* précédent, passer aux lignes d'influence d'une ferme de degré d'hyperstaticité $(n + 1)$ lorsqu'on connaît les lignes d'influence de la ferme de degré n . Ce procédé est en quelque sorte un procédé de récurrence.

e. Fermes à montants et croix de Saint-André. — Dans l'étude des fermes à montants et croix de Saint-André, nous avons appliqué une méthode plus directe et en même temps plus générale. Nous avons établi en effet, en nous basant sur le principe de Maxwell, des formules de récurrence qui nous permettent de déterminer progressivement les lignes d'influence de tous les montants surabondants, ceux-ci étant en nombre quelconque. Dès lors, les fermes de ce type sont pratiquement résolues en formules concrètes constituant en quelque sorte, comme nous le verrons plus loin, les solutions explicites des équations générales de déformation élastique de ces fermes à nombre élevé de barres surabondantes.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES LIGNES D'INFLUENCE, POUR DES FORCES EXTÉRIEURES
QUELCONQUES, DES EFFORTS PRINCIPAUX DANS LES BARRES
DES ARCS EN TREILLIS ARTICULÉ A MONTANTS ET CROIX DE
SAINT-ANDRÉ.

I. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES ET PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

Nous considérerons les fermes à montants et croix de Saint-André de forme tout à fait quelconque, mais planes, et nous les supposerons articulées aux nœuds, en nous bornant par conséquent au calcul des lignes d'influence des *efforts principaux*, en d'autres termes des efforts normaux internes. Ceux-ci doivent d'ailleurs, dans toute construction réticulaire, être déterminés en premier lieu et servent ensuite de point de départ pour le calcul des efforts secondaires, dus à la rigidité des attaches.

Nous établirons les lignes d'influence des efforts principaux par une méthode semblable à celle que nous avons utilisée dans la résolution des poutres droites du même type ⁽¹⁾. Elle est applicable aux arcs par suite du maintien des propriétés particulières des montants, que nous choisirons comme barres surabondantes. Toutefois, on conçoit qu'elle se complique quelque peu en raison du cas tout à fait général que nous allons considérer. Après coup, nous déduirons, à l'aide des formules générales établies pour les fermes quelconques, celles relatives aux poutres droites. Nous retrouverons ainsi les mêmes résultats que ceux obtenus directement dans le travail déjà cité ⁽¹⁾. Ils seront cependant plus complets que ces derniers, ceux-ci n'ayant été déterminés que pour des forces extérieures verticales.

⁽¹⁾ Ce travail est intitulé *Étude des poutres à losanges et théorie des lignes d'influence des poutres droites en treillis à croix de Saint-André*. Il vient d'être publié dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, Paris, novembre 1936.

Nous n'étudierons que les lignes d'influence des *systèmes isostatiques extérieurement* et plus spécialement de ceux qui présentent un appui fixe à rotule et un appui à rouleaux de dilatation se mouvant sur un plan d'appui dont la trace dans le plan moyen de la poutre est parallèle à la droite joignant l'appui fixe au nœud d'appui mobile ou, ce qui revient très sensiblement au même, dont la trace est cette droite elle-même (*fig. 6, a*). L'étude de ce système nous permettra en effet de résoudre tous les cas qui peuvent se présenter. Tels sont ceux des arcs doublement encastrés, des arcs bi- ou tri-articulés, des arcs à liaisons mixtes et en particulier des arcs qui présentent, à une extrémité, une rotule et, à l'autre, un plan d'appui dont la trace dans le plan moyen de l'arc ne passe pas par cette rotule. On peut en effet toujours ramener un quelconque de ces arcs au type que nous étudierons (*fig. 6, a*) en remplaçant les liaisons extérieures surabondantes par les forces ou couples de liaisons correspondants. On pourra facilement, par exemple à l'aide du théorème de Castigliano ou du principe de Maxwell, établir les lignes d'influence de ces forces ou couples de liaison, une fois qu'on aura déterminé celles des efforts principaux dans toutes les barres du système de base (*fig. 6, a*). Il est inutile de dire que nous supposons dans un même plan l'arc et toutes les forces extérieures qui le sollicitent, celles-ci ayant des directions quelconques dans ce plan.

Ce type d'arc présente un degré d'hyperstaticité égal au nombre de panneaux, si ceux-ci sont tous à montants et croix de Saint-André. Comme le nombre des montants est supérieur d'une unité à celui des panneaux, nous pourrions choisir comme barres surabondantes tous les montants, sauf celui d'extrémité de gauche. Nous établirons des équations de récurrence entre les lignes d'influence des montants successifs, ce qui nous permettra, avec une égale facilité, de résoudre une ferme de degré d'hyperstaticité quelconque.

Une fois établies les lignes d'influence des montants surabondants, le problème sera ramené à l'étude d'un système isostatique. Nous pourrions en effet appliquer le principe de superposition ⁽¹⁾ comme suit :

La ligne d'influence d'une barre quelconque *d* (*fig. 6, a*), autre

(¹) Toute l'étude qui suit ne sera donc exacte que si les déformations sont proportionnelles aux efforts, c'est-à-dire suivent la loi de Hooke.

que les montants surabondants, est égale à celle de la même barre considérée comme appartenant à la ferme (*b*) dans laquelle on a coupé les montants surabondants et appliqué en leurs couples de lèvres les forces internes y développées par la force extérieure mobile *P*. Dès lors, d'après le principe de superposition, on voit, en décomposant la sollicitation (*b*) en deux autres (*c*) et (*d*), que la ligne d'influence de la barre *d* n'est autre que la somme de celles de la même barre *d* dans les fermes (*c*) et (*d*). L'arc (*c*) est isostatique intérieurement. On pourra déterminer la ligne d'influence de la barre *d* en appliquant le principe des travaux virtuels (*voir* Chapitre I, *e*). Pour cela, on coupe la barre *d* et l'on déforme cinématiquement la ferme en produisant un *rapprochement* ⁽¹⁾ des lèvres de la coupure. La ligne d'influence de *d* n'est autre que la déformée de l'arc mesurée à l'échelle de ce rapprochement. Pour déterminer la déformée, on fera utilement usage d'un tracé de Williot (*voir* Chapitre I, *b*). Celui-ci est d'ailleurs très simple dans le cas actuel. En effet, la ferme devient déformable par coupure de *d*. Sa déformation est donc cinématique et s'obtient sans faire naître d'efforts normaux dans les barres. Il en résulte que, dans le tracé de Williot, toutes les déformations longitudinales des barres sont nulles.

Quant à la ligne d'influence de *d* due aux efforts de compression des lèvres des montants coupés (*fig.* 6, *d*), variables avec la position de *P*, elle est une fonction linéaire de ces efforts, dont les coefficients numériques sont constants et peuvent s'obtenir une fois pour toutes en traçant une figure de Cremona pour chacun des montants coupés. On partira de la sollicitation interne du montant coupé considéré et l'on étendra le tracé jusqu'au montant d'extrémité de gauche. Pour tous ces tracés de Cremona, les réactions de la ferme sont nulles puisque celle-ci est sollicitée par deux forces égales et opposées, les deux compressions internes du montant coupé, compressions qui sont à présent considérées comme forces extérieures. Il est à remarquer qu'il suffit d'un nombre de tracés de Cremona égal au nombre de montants surabondants et, même, si la ferme est symétrique, d'un nombre moitié moindre, car chacun de ces tracés suffit pour déterminer les influences de la sollicitation du montant coupé pour lequel

(1) Nous considérerons les compressions des barres comme positives.

il est établi, sur toutes les barres d autres que ce montant. D'autre part, ces tracés sont de plus en plus simples au fur et à mesure qu'ils se rapportent aux sollicitations de montants coupés de plus en plus rapprochés de l'extrémité de gauche. Pour réduire et accélérer ces tracés, on peut d'ailleurs les greffer l'un sur l'autre, en tenant compte des sollicitations de tous les montants coupés au fur et à mesure qu'on les rencontre dans le tracé de Cremona partant de l'extrémité de droite.

L'étude complète des arcs à montants et croix de Saint-André se réduira donc à deux parties. Il sera en outre utile de diviser la première en deux phases, comme suit :

PREMIÈRE PARTIE. — Détermination des lignes d'influence des n montants surabondants, si n est le nombre total des panneaux et si ceux ci sont tous à diagonales croisées :

Première phase. — Nous calculerons les lignes d'influence, pour des charges verticales, horizontales ou quelconques, d'un montant intermédiaire quelconque r ($r = 1, 2, \dots, n$) de l'arc, *ce montant étant considéré comme montant d'extrémité* (fig. 7, a) *d'un arc partiel formé des r panneaux qui se trouvent à sa gauche.* Nous établirons à cette fin des équations de récurrence reliant les lignes d'influence partielles, *ainsi définies*, de deux montants successifs ($r - 1$) et r . A l'aide de cette formule, on calculera donc de proche en proche les lignes d'influence des montants $1, 2, \dots, n$ considérés comme montants d'extrémité de droite des arcs partiels à $1, 2, \dots, n$ panneaux. *On aboutira ainsi aux lignes d'influence du montant n d'extrémité de droite de l'arc réel à n panneaux.*

On calculera aussi, à l'aide des mêmes formules, les lignes d'influence des mêmes montants ($n - 1, \dots, 2, 1$) considérés cette fois comme montants d'extrémité de gauche des arcs partiels à $(1, 2, \dots, n - 1)$ panneaux, en partant de l'extrémité de droite. On aboutira ainsi aux lignes d'influence du montant d'extrémité de gauche de l'arc réel à n panneaux.

Seconde phase. — Nous établirons ensuite les lignes d'influence réelles des mêmes montants, considérés cette fois comme appartenant à l'arc total à n panneaux. Ces lignes d'influence s'exprimeront direc-

tement en fonction des deux séries de lignes d'influence établies au cours de la première phase du calcul. Ces deux séries seront donc directement utilisables, de sorte qu'aucun des calculs auxiliaires de la première phase ne sera inutile.

DEUXIÈME PARTIE. — Détermination des lignes d'influence de toutes les autres barres de la poutre (diagonales, membrures) en appliquant le principe de superposition comme expliqué ci-dessus et schématisé par la figure 6.

II. — NOTATIONS.

Nous ordonnerons les panneaux de 1 à n . En outre, *dans un panneau r donné*, nous désignerons par $\sigma_{r_{e,i,g,d}}$ et σ_r , par $l_{r_{e,i,g,d}}$ et l_r , par $a_{r_{e,i,g,d}}$ et a_r , respectivement les sections, les longueurs et les inclinaisons sur l'horizontale, des barres de la membrure *extérieure*, de la membrure *intérieure*, de la diagonale inclinée à *gauche*, de celle inclinée à *droite* et du montant d'ordre r , les montants, au nombre de $(n+1)$, étant numérotés de 0 à n . En ce qui concerne les inclinaisons α des barres, on se reportera à la figure 7 (α) pour voir à *partir de l'horizontale de quel nœud* nous les avons comptées, les formules que nous établirons ci-après n'étant évidemment valables que si l'on utilise les mêmes angles. Nous avons adopté comme sens positif de ceux-ci le sens trigonométrique.

Nous désignerons encore par :

$\lambda'_{r_{e,i,g,d}}$ et λ_r , les déformations longitudinales des barres du panneau r dues à deux forces de traction unitaires des lèvres du montant r coupé dont nous recherchons l'équation de la ligne d'influence en appliquant le principe de Maxwell;

E , le module d'élasticité des barres, que nous avons supposé le même pour toutes ⁽¹⁾;

m_r , n_r , p_r , q_r , les angles réciproques des barres du panneau r ;
 i , l'inclinaison, sur l'horizontale, de la ligne OO' de ces appuis;

(1) Nous aurions très bien pu supposer E différent pour chacune des barres. Les formules n'en seraient pas plus compliquées. Il suffirait de substituer $E_k \sigma_k$ à σ_k dans les formules que nous allons établir.

x, y , les coordonnées horizontale et verticale d'un nœud quelconque de la poutre ;

r_e et r_i , les nœuds d'extrémités du montant r ;

w_{r_i} , w'_{n-r_i} , u_{r_i} , u'_{n-r_i} , t , j_{r_i} , j'_{n-r_i} et v_{r_i} , respectivement les angles d'inclinaison sur l'horizontale des rayons $Or_i = u_{r_i}$ et $O'r_i = u'_{n-r_i}$, la portée OO' mesurée sur la ligne des appuis, les projections sur cette ligne de u_{r_i} et u'_{n-r_i} et la distance de r_i à cette ligne.

On se reportera utilement aux indications des figures 7 (a, b, c, d, e, f, g) pour ce qui concerne les autres données.

III. — PREMIÈRE PARTIE.

Lignes d'influence des montants sur bondants 1 à n .

I. — PREMIÈRE PHASE.

A. Ligne d'influence, pour des forces de directions quelconques, du montant d'extrémité r du tronçon à r panneaux qui se trouve à gauche de ce montant et dont le panneau d'extrémité de droite au moins est à montants et croix de Saint-André. Formules de récurrence. — Nous considérerons le tronçon quelconque ($Or_e r_i$) à r panneaux constituant la partie du système complet (OrO') à n panneaux, à gauche du montant r . Nous supposerons donc pour l'instant, que ce tronçon forme une ferme à r panneaux indépendante du reste de la ferme totale à n panneaux et dont le panneau d'extrémité de droite au moins est à montants et croix de Saint-André. Nous appliquerons le principe de Maxwell à la détermination de la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant r considéré comme montant d'extrémité du tronçon à r panneaux ainsi défini. On connaît le procédé d'application de ce principe (*voir* Chapitre I, d).

Il suffit en effet de couper le montant r étudié, dans l'arc non sol-

licité initialement, d'appliquer aux deux lèvres de la coupure deux tractions opposées k_r arbitraires (nous choisirons $k_r=1$) et de mesurer la déformée résultant de cette sollicitation extérieure, à l'échelle du *rapprochement* des lèvres de la coupure. On considérera la projection de la déformée sur la direction des forces extérieures éventuelles et on la mesurera positivement dans le même sens que ces dernières. Nous supposerons celles-ci égales à l'unité.

A l'aide d'une figure de Cremona, nous déduirons les efforts internes dans les barres du panneau r qui résultent des deux forces de traction *unitaires* des lèvres du montant r coupé. Nous avons tracé cette figure sur la figure même du panneau r (*fig. 7, c*) en représentant les deux forces de traction $k_r=1$ par la longueur même $r_e r_i$ du montant r . Cette représentation nous permettra de démontrer aisément une propriété très importante des panneaux à diagonales croisées, si nous donnons en même temps au tracé de Cremona la forme particulière suivante.

Notons tout d'abord que celle-ci s'écarte quelque peu de la forme originale du tracé de Cremona, basée sur les figures réciproques, avec correspondance de points et de régions. Nous l'appliquerons d'ailleurs au panneau r de la ferme, lequel possède des diagonales croisées et se distingue donc des charpentes triangulées pour lesquelles le tracé de Cremona a été défini.

La traction $k_r=1$ appliquée à la lèvre supérieure du montant r coupé se transmet au nœud r_e . Nous la représenterons par le segment $\overrightarrow{r_e r_i}$ figurant la longueur l_r du montant r . Le nœud r_e étant en équilibre, les efforts internes dans les barres r_e (ou $\overrightarrow{r_e r_i}$) et r_d (ou $\overrightarrow{r_e r_d}$) font équilibre à la force extérieure $k_r=1$ appliquée au nœud r_e . Le triangle $(r_i r_e b)$ de décomposition de $k_r=1$ suivant ces deux barres, dans lequel b_{ri} est parallèle à $\overrightarrow{r_e r_i}$, donne donc en $\overrightarrow{r_i b}$ et en $\overrightarrow{b r_e}$ les longueurs représentatives des efforts internes $\mathfrak{P}_{k_r}$ et $\mathfrak{P}_{r_i}$ dans les barres r_e et r_d , à la même échelle que $k_r=1$. Ces efforts internes sont respectivement une traction et une compression. De même, nous représenterons l'effort $k_r=1$ de traction du nœud r_i , par le segment $\overrightarrow{r_i r_e}$ et nous décomposerons cet effort suivant les deux barres r_i et r_g convergeant au nœud r_i , en traçant le triangle $(r_i r_e a)$ de décomposition de $k_r=1$, dans lequel $\overrightarrow{r_e a}$ est parallèle à $\overrightarrow{r_e r_i}$.

Ce triangle donne en $\overrightarrow{r_e a}$ et $\overrightarrow{a r_i}$ les segments représentatifs des efforts internes $\mathfrak{F}_{r_i}$ et $\mathfrak{F}_{r_g}$ dans les barres r_i et r_g , qui sont respectivement une traction et une compression. Ceux-ci sont de même figurés à la même échelle que celle de $k_r = 1$. Toutes les forces sont donc représentées à la même échelle.

A présent, nous pouvons déterminer *séparément* les actions et réactions mutuelles des nœuds $\overline{r-1}_e$ et $\overline{r-1}_i$ et de la ferme partielle formée des $(r-1)$ panneaux de gauche de la ferme totale à n panneaux. Nous avons représenté dans la figure 7 (b) l'extrémité de droite de cette ferme partielle.

La réaction de la ferme à $(r-1)$ panneaux sur le nœud $\overline{r-1}_e$ du panneau r (fig. 7, c.) fait équilibre à la résultante $\overrightarrow{ba}$ des efforts internes $\overrightarrow{br_i} = \mathfrak{F}_{r_e}$ et $\overrightarrow{r_i a} = \mathfrak{F}_{r_g}$ dans les barres r_e (ou $\overline{r-1}_e r_e$) et r_g (ou $\overline{r-1}_e r_i$) concourant au nœud $\overline{r-1}_e$, ce dernier étant en équilibre. Elle est donc figurée en grandeur, direction et sens par le segment $\overrightarrow{ab}$, à la même échelle que celle de $k_r = 1$. De même, la réaction de la ferme à $(r-1)$ panneaux sur le nœud $\overline{r-1}_i$ du panneau r fait équilibre à la résultante ab des efforts internes $\overrightarrow{ar_e} = \mathfrak{F}_{r_i}$ et $\overrightarrow{r_e b} = \mathfrak{F}_{r_d}$ dans les barres r_i (ou $\overline{r-1}_i r_i$) et r_d (ou $\overline{r-1}_i r_e$) concourant au nœud $\overline{r-1}_i$, ce dernier étant en équilibre. Elle est donc figurée en grandeur, direction et sens par le segment $\overrightarrow{ba}$, à la même échelle que celle de $k_r = 1$, ou encore, que celle de la réaction de la ferme à $(r-1)$ panneaux sur le nœud $\overline{r-1}_e$ du panneau r .

Autrement dit, les réactions de la ferme partielle à $(r-1)$ panneaux sur le panneau r , sont aux nœuds $\overline{r-1}_e$ et $\overline{r-1}_i$ égales, de même direction et de sens opposés. Nous les avons notées sous la forme $\frac{1}{\pi_r}$ en vue de simplifications ultérieures des écritures. Elles coïncident d'ailleurs toutes deux avec la direction du montant $(r-1)$ et sont donc égales et opposées. On peut démontrer cette propriété comme suit : Si e_r et g_r , h_r et f_r désignent les segments des barres r_g et r_d compris entre leur point c de croisement et leurs nœuds d'extrémités, on pourra écrire, à l'aide des triangles semblables

$(ar_e c)$ et $(r-1 \text{ } cr_i)$ d'une part, $(r-1 \text{ } r_e c)$ et (bcr_i) d'autre part

$$\frac{\overline{ac}}{f_r} = \frac{g_r}{h_r} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{bc}}{f_r} = \frac{g_r}{e_r}; \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}} = \frac{e_r}{h_r}.$$

Cette dernière proportion montre bien que $\overrightarrow{ab}$, autrement dit $\frac{1}{\pi_r}$, est parallèle au montant $(r-1)$. Elle prouve que la propriété que nous avons démontrée dans un précédent travail, pour les poutres droites à montant et croix de Saint-André ⁽¹⁾, à savoir que l'action du panneau r sur la poutre à $(r-1)$ panneaux se réduit à deux forces égales et opposées appliquées aux nœuds d'extrémités du montant $(r-1)$ suivant la direction de celui-ci, subsiste pour les panneaux de forme quelconque. Cette propriété est très importante. En effet, elle nous permettra encore d'établir, pour les fermes quelconques à montant et croix de Saint-André, des équations de récurrence entre les lignes d'influence des montants successifs.

Remarquons cependant que nous aurions quand même pu en établir si les forces $\frac{1}{\pi_r}$ n'avaient pas eu la direction du montant $(r-1)$, car dans cette hypothèse, les composantes de $\frac{1}{\pi_r}$ dans la direction du montant $(r-1)$ et dans la direction normale auraient été deux à deux égales et opposées, $\frac{1}{\pi_r}$ ayant la même intensité aux deux nœuds et des lignes d'action parallèles. Il serait donc entré dans les formules un terme supplémentaire, fonction de l'effet dans le montant $(r-1)$, d'un couple de deux forces normales à ce montant, égales, opposées et appliquées, l'une en $r-1 \text{ } e$ et l'autre en $r-1 \text{ } i$. Or, nous verrons dans la suite que nous pouvons exprimer cet effet en fonction de paramètres entrant dans les formules de récurrence finales (paramètre K^{r-1}). L'inconvénient le plus grave aurait été une complication de ces dernières.

D'autre part, la forme particulière de la figure de Cremona (fig 7, c.) fournit sans difficulté les valeurs suivantes de $\frac{1}{\pi_r}$ et des efforts internes de compression dans les barres du panneau r , avec leur signe, si l'on utilise à cette fin les propriétés des triangles sem-

⁽¹⁾ Voir *Annales des Ponts et Chaussées*, novembre 1936, article déjà cité.

blables cités plus haut

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi_r} = \frac{l_{r-1}}{l_r} \left(\frac{f_g}{he} \right)_r, \\ \mathcal{F}_{r_i} = -\frac{f_r}{h_r} \frac{l_{r_i}}{l_r}, \end{array} \right. \quad \mathcal{F}_r = -1, \quad \mathcal{F}_{r_e} = -\frac{g_r}{e_r} \frac{l_{r_e}}{l_r},$$

$$\mathcal{F}_{r_g} = \frac{g_r}{h_r} \frac{l_{r_d}}{l_r} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{r_d} = \frac{f_r}{e_r} \frac{l_{r_g}}{l_r}.$$

On en déduira facilement les déformations longitudinales des barres, à l'aide de la formule générale

$$(2'') \quad \lambda = \frac{\mathcal{F} l}{E \sigma},$$

où $\mathcal{F}$, l , E et σ sont respectivement l'un des efforts $\mathcal{F}$ ci-dessus (2'), la longueur, le coefficient d'élasticité longitudinale et l'aire de la section transversale de la barre considérée. Les deux forces $\frac{1}{\pi_r}$ sont attractives sur le panneau r (*fig. 7, c.*) et répulsives sur la ferme partielle à $(r-1)$ panneaux (*fig. 7, b.*).

On remarquera que tous les efforts (2') ci-dessus sont des produits de rapports de longueurs du panneau r . Ils ne sont donc fonction que de la forme de la figure géométrique formée par les axes des barres de ce panneau *et sont les mêmes pour tous les panneaux homothétiques.*

Cela étant, considérons le tronçon à $(r-1)$ panneaux, isolé, auquel nous appliquons les deux actions $\frac{1}{\pi_r}$ du panneau r pour tenir compte de l'effet de ce dernier, effet qui résulte, comme nous venons de voir, des tractions $k_r = 1$ des deux lèvres du montant r coupé. Recherchons sa *déformée* due à ces actions $\frac{1}{\pi_r}$. Cette *déformée* ne sera en rien modifiée si nous coupons le montant $(r-1)$ et si nous appliquons aux lèvres de cette coupure, en plus des deux compressions y développées par le couple de forces répulsives $\frac{1}{\pi_r}$, ces dernières elles-mêmes, transportées sur leur ligne d'action commune (*fig. 7, d.*). Désignons par $-\frac{1}{\pi_r} N^{r-1}$ l'effort interne développé dans le montant $(r-1)$ par les deux forces répulsives $\frac{1}{\pi_r}$. Nous aurons ainsi, en fin de compte, coupé le montant $(r-1)$ et appliqué aux deux lèvres de sa

coupure deux tractions $k_{r-1} = - \frac{1 - N^{r-1}}{\pi_r}$. Nous aurons par conséquent réalisé, d'après le principe de Maxwell, la sollicitation utilisée pour la détermination de la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant ($r-1$) considéré comme montant d'extrémité de droite de la poutre à ($r-1$) panneaux : la déformée de ce tronçon aura pour composantes verticale et horizontale, d'après l'équation (1')

$$(3) \quad v(x, y) = k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} V^{r-1}(x, y) \quad \text{et} \quad u(x, y) = k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} H^{r-1}(x, y),$$

où $V^{r-1}(x, y)$ et $H^{r-1}(x, y)$ sont respectivement les lignes d'influence du montant ($r-1$) pour des forces extérieures *unitaires* mobiles verticale et horizontale. Nous supposons connues ces dernières. De ce fait, nous connaissons aussi N^{r-1} , qui peut aisément s'exprimer comme suit en fonction de $V_{\underline{r-1}e}^{r-1}$ et de $H_{\underline{r-1}e}^{r-1}$ dus à des forces unitaires appliquées aux nœuds $\underline{r-1}_e$ et $\underline{r-1}_i$,

$$(3') \quad N^{r-1} = V^{r-1} \sin \alpha_{r-1} - H^{r-1} \cos \alpha_{r-1},$$

en posant

$$(3'') \quad V_{\underline{r-1}e}^{r-1} - V_{\underline{r-1}i}^{r-1} = V^{r-1} \quad \text{et} \quad H_{\underline{r-1}e}^{r-1} - H_{\underline{r-1}i}^{r-1} = H^{r-1}.$$

$k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1}$ est le rapprochement des lèvres dû aux deux tractions k_{r-1} des lèvres du montant ($r-1$). Celui des nœuds $\underline{r-1}_e$ et $\underline{r-1}_i$, sous l'effet des tractions k_{r-1} des lèvres, est le même que dans le cas de la sollicitation de la figure (b) où le montant ($r-1$) n'est pas coupé et où celui-ci subit une compression $-\frac{1}{\pi_r} N^{r-1}$. Il est donc égal à

$$(4) \quad \Delta_{r-1} = k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} = - \frac{N^{r-1}}{\pi_r} \frac{l_{r-1}}{E \sigma_{r-1}}.$$

Par suite, on aura, d'après la formule (2),

$$(5) \quad k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} = - \frac{l_{r-1}}{\pi_r E \sigma_{r-1}}.$$

Supposons à présent que tous les tronçons envisagés, et en particulier celui à ($r-1$) panneaux, sont appuyés en leur nœud inférieur du montant d'extrémité de droite, pour l'instant $\underline{r-1}_i$, sur un plan de trace parallèle à la ligne des appuis OO' du sys-

tème complet à n panneaux. Nous verrons dans la suite quelles sont les raisons pour lesquelles nous avons choisi ce mode d'appui.

Dans le tronçon à $(r-1)$ panneaux ayant à gauche la rotule O et ainsi appuyé à droite, le déplacement du nœud $\underline{r-1}_e$ par rapport au nœud $\underline{r-1}_i$ aura pour composante δ_{r-1} normale au montant $(r-1)$ et dirigée vers le panneau r ,

$$(6) \quad \delta_{r-1} = k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} K^{r-1},$$

d'après la formule (1'), si l'on désigne par K^{r-1} l'effort normal développé dans le montant $(r-1)$ par un couple de deux forces unitaires normales au montant et appliquées, l'une en $\underline{r-1}_e$ et dirigée vers le panneau r , l'autre en $\underline{r-1}_i$ et dirigée en sens inverse (fig. 7, b.).

Remarquons en outre que, sous l'action de deux tractions k_{r-1} des lèvres du montant $(r-1)$, le nœud $\underline{r-1}_i$ ne peut se déplacer qu'en ligne droite sur la trace du plan d'appui que nous avons introduit en $\underline{r-1}_i$. Si t_r est ce déplacement rectiligne, celui de $\underline{r-1}_e$ sera la résultante d'une translation t_r parallèle à OO' , d'un rapprochement $\Delta_{r-1} = k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1}$ de $\underline{r-1}_e$ et d'un déplacement δ_{r-1} normal au montant $(r-1)$ (fig. 7, e.). Δ_{r-1}^{r-1} désigne, comme nous avons vu, le rapprochement des nœuds d'extrémités du montant $(r-1)$ coupé, dû à deux tractions unitaires de ses lèvres [voir formule (4)]. Or, l'équation générale (1') nous permet d'écrire, si nous mesurons les forces verticales positivement vers le bas et les forces horizontales positivement vers la droite

$$(7) \quad \begin{cases} (t_r)_h = k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} H_{r-1}^{r-1} & \text{vers la droite,} \\ (t_r)_v = k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} V_{r-1}^{r-1} & \text{vers le bas,} \end{cases}$$

où $(t_r)_h$ et $(t_r)_v$ sont les composantes horizontale et verticale de t_r et H_{r-1}^{r-1} et V_{r-1}^{r-1} , les efforts internes développés dans le montant $(r-1)$, respectivement par des forces horizontale et verticale, égales à $+1$ et appliquées en $\underline{r-1}_i$. Il est bon de noter que le rapprochement Δ_{r-1} de $\underline{r-1}_e$ et de $\underline{r-1}_i$ n'est pas influencé par la translation t_r .

Connaissant la déformation du montant $(r-1)$ et les déplacements

de $r-1$, nous pourrons, sans développer, dans les barres du panneau r (*fig. 7, c.*), d'effort supplémentaire aux efforts $\mathfrak{T}$ y développés par les tractions $k_r=1$ du montant r coupé, déformer ce panneau pour ramener en coïncidence les deux parties des nœuds $\underline{r-1}_e$ et $\underline{r-1}_i$. Le panneau r (*fig. 7, c*) est d'ailleurs déformable et en équilibre sous l'action des deux paires de forces extérieures égales et opposées $\frac{1}{\pi_r}$ et k_r .

Nous déduirons donc les déplacements des nœuds r_e et r_i à partir de ceux de $\underline{r-1}_e$ et de $\underline{r-1}_i$, en tenant compte des déformations longitudinales $\lambda^{eng.d}$ des barres du panneau r dues aux forces $k_r=1$. Nous avons à cette fin tracé le diagramme (*fig. 7, f*) de Williot, en ne tenant d'abord pas compte de la translation d'ensemble t_r du panneau r due à la même translation t_r du montant $(r-1)$, quitte après coup à composer géométriquement cette translation avec les déplacements de $\underline{r-1}_e$, de $\underline{r-1}_i$, de r_e et de r_i .

Dans le tracé (*f*) de Williot, le point $\underline{r-1}_i$ figure la position initiale du nœud $\underline{r-1}_i$ avant toute déformation, c'est-à-dire avant l'application des tractions $k_r=1$ aux lèvres de la coupure du montant r . Il figure d'ailleurs aussi la position initiale, avant toute déformation, de la ferme partielle constituée des r panneaux de gauche de la ferme totale à n panneaux (*voir Chapitre I, b*). Si nous ne tenons tout d'abord pas compte de t_r , la position finale de $\underline{r-1}_i$ est en $\underline{r-1}'_i$, en coïncidence avec $\underline{r-1}_e$. On trouvera la position finale $\underline{r-1}'_e$ de $\underline{r-1}_e$ en portant successivement à partir de $\underline{r-1}'_i$ les composantes, parallèle Δ_{r-1} et normale δ_{r-1} au montant $(r-1)$, du déplacement *relatif* de $\underline{r-1}_e$ et $\underline{r-1}_i$. On trouvera ensuite la position finale r'_e du nœud r_e en portant tout d'abord à partir de $\underline{r-1}'_i$ le raccourcissement λ^a de la diagonale $\underline{r-1}_i r_e$ (celle-ci étant comprimée, r_e se rapproche de $\underline{r-1}_i$) parallèlement à celle-ci et, à partir de $\underline{r-1}'_e$, l'allongement λ^e de la membrure $\underline{r-1}_e r_e$, puis en élevant aux extrémités de ces segments les normales à ceux-ci. Ces normales se coupent en r'_e . On trouve de même la position r'_i du nœud r_i en portant le raccour-

cissement λ'^s de la diagonale $\overline{r-1}_e r_i$ et l'allongement λ'^i de la membrure $\overline{r-1}_i r_i$, et en élevant les normales 8-7 et 6-7 à ces segments. Finalement, nous porterons en $\overline{r-1}'_i$, $\overline{r-1}'_e$, r'_e et r'_i la translation d'ensemble t_r du panneau r .

Nous trouverons ainsi en $\overline{r-1}''_i$, $\overline{r-1}''_e$, r''_e et r''_i les positions finales des nœuds $\overline{r-1}_i$, $\overline{r-1}_e$, r_e et r_i , après déformation de la ferme partielle à r panneaux, due à l'application des deux tractions $k_r = 1$ aux lèvres du montant r coupé. Leur position initiale commune, avant toute sollicitation et déformation, est figurée par le point origine $\overline{r-1}_i$ du tracé de Williot. On en déduira donc très aisément, à l'échelle du tracé, en grandeur, direction et sens, les déplacements des divers nœuds, ainsi que leurs déplacements relatifs.

Si l'on projette, *sur la direction du montant r et sur la direction normale*, les trois contours fermés et *indépendants* (7-0-1-9-5-6-7), (7-8-3-4-5-6-7) et (1-2-3-4-5-9-1) du tracé de Williot, on obtient les six relations indépendantes suivantes (1) :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \Delta'_r - y_1 \sin m_r - \lambda'^a \cos m_r + \lambda'^i \cos p_r - y_3 \sin p_r = 0, \\ \delta'_r - y_1 \cos m_r + \lambda'^a \sin m_r + \lambda'^i \sin p_r + y_3 \cos p_r = 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} y_4 \sin n_r + \lambda'^s \cos n_r + \delta_{r-1} \sin b_r - \Delta_{r-1} \cos b_r + \lambda'^i \cos p_r - y_3 \sin p_r = 0, \\ -y_4 \cos n_r + \lambda'^s \sin n_r - \delta_{r-1} \cos b_r - \Delta_{r-1} \sin b_r + \lambda'^i \sin p_r + y_3 \cos p_r = 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -y_2 \sin q_r + \lambda'^e \cos q_r + \delta_{r-1} \sin b_r - \Delta_{r-1} \cos b_r + \lambda'^a \cos m_r + y_1 \sin m_r = 0, \\ +y_2 \cos q_r + \lambda'^e \sin q_r + \delta_{r-1} \cos b_r + \Delta_{r-1} \sin b_r + \lambda'^a \sin m_r - y_1 \cos m_r = 0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

entre les quatre paramètres $y_1 = \overline{9-1}$, $y_2 = \overline{2-1}$, $y_3 = \overline{7-6}$, $y_4 = \overline{7-8}$, pris en valeur absolue, et les deux inconnues Δ'_r et δ'_r , celles-ci étant respectivement le rapprochement des nœuds r_e et r_i dans la direction du montant r et la composante normale à ce montant, dans le sens du panneau ($r+1$), du déplacement de r_e par rapport à r_i . Ces deux composantes du déplacement relatif de r_e et r_i sont indépendantes de la translation d'ensemble t_r du panneau r , ce qui est d'ailleurs évident. C'est pour cette raison que nous n'avons pas tenu compte de cette dernière dans les contours fermés précédents. Des quatre dernières équations (8) indépendantes de Δ'_r et δ'_r ,

(1) Dans ces relations, les λ doivent être pris en valeur absolue, car on a déjà tenu compte de leur sens dans le tracé de Williot (*fig.* 7, *f*).

on déduit :

$$(9) \quad \gamma_1 = \cos \sec(m - q)_r [\Delta_{r-1} \cos(q + b)_r - \delta_{r-1} \sin(q + b)_r - \lambda^{r_e} - \lambda^{r_d} \cos(q - m)_r]$$

et

$$(10) \quad \gamma_3 = -\cos \sec(p - n)_r [\Delta_{r-1} \cos(n - b)_r + \delta_{r-1} \sin(n - b)_r - \lambda^{r_g} - \lambda^{r_i} \cos(p - n)_r],$$

paramètres qui, seuls, interviennent dans l'expression de Δ'_r et δ'_r [voir les deux premières équations (8)]. Si l'on pose successivement

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \pi_r^2 \frac{\sigma_{r-1} l_r}{\sigma_r l_{r-1}} = \rho_r, & \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_{r_g}} \frac{e_r}{f_r} \frac{l_{rd} l_{rg}}{l_{r-1}^2} = \Psi_r, \\ \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_g} \frac{g^2 e^2}{h^2 f^2} \frac{l_d}{l_g} \right)_r = \Lambda_r, & \frac{\sigma_{r-1}}{l_{r-1}^3} \left(\frac{l_i^3}{\sigma_i} \frac{e^2}{g^2} + \frac{l_e^3}{\sigma_e} \frac{h^2}{f^2} \right)_r = \alpha_r, \\ \frac{e_r}{f_r} \frac{l_{rd}}{l_{r-1}} \frac{\Psi_r}{\Lambda_r} (1 + \Lambda_r) = \gamma_r, & \alpha_r + \gamma_r = \mathcal{A}_r, \\ \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_e} \frac{g}{f} \frac{l_g^2}{l_d l_g} \right) = \Omega_r, & \left(\frac{\sigma_g}{\sigma_i} \frac{f}{g} \frac{l_i^2}{l_d l_g} \right)_r = \Phi_r, \\ \Lambda_r \left(\frac{f}{g} \frac{l_g}{l_d} \frac{l_i}{l_e} \right)_r = \mathcal{E}_r, & \frac{\Psi_r \pi_r}{\mathcal{E}_r} \frac{\cos a_{r_e}}{\sin(p - n)_r} = \mathcal{B}_r, \\ \frac{\beta_r}{\pi_r} [\cos q + \cos m \Omega_r - \mathcal{E}_r \cos q - \Phi_r \mathcal{E}_r \cos n]_r = \mathfrak{A}_r \cos a_{r_e}, \\ \frac{\cos b_r \sin(q - m + n - p)_r}{\sin(q - m)_r \sin(p - n)_r} = \mathcal{U}_r \quad \text{et} \quad V^{r-1} \cos a_{r-1} + H^{r-1} \sin a_{r-1} = K^{r-1}, \end{array} \right.$$

Δ'_r et δ'_r s'écrivent, toutes transformations faites,

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta'_r = \frac{l_r}{E \sigma_r} \frac{\mathcal{A}_r + N^{r-1}}{\rho_r} \\ \text{et} \\ \delta'_r = \frac{l_{r-1}}{\pi_r E \sigma_{r-1}} \left(\mathfrak{A}_r - \frac{l_r}{l_{r-1}} K^{r-1} - \mathcal{U}_r N^{r-1} \right). \end{array} \right.$$

Dans son déplacement, r_i s'est écarté de la trace de son plan d'appui fictif. Nous avons choisi celle-ci parallèle à OO' . Nous devons donc faire subir au tronçon à r panneaux une rotation d'ensemble ω_{r_i} dans le sens trigonométrique si nous supposons que r_i s'est déplacé, en dessous de sa ligne d'appui, d'une distance dont $\Delta_n^{r_i}$ est la projection sur la normale à cette droite d'appui. On a

$$\Delta_n^{r_i} = \Delta_v^{r_i} \cos i + \Delta_h^{r_i} \sin i,$$

si $\Delta_v^{r_i}$ et $\Delta_h^{r_i}$ sont les composantes verticale et horizontale du déplace-

ment de r_i . La rotation ω_{r_i} s'exprime par

$$\omega_{r_i} = \frac{\Delta_{r_i}^{r_i}}{j_{r_i}},$$

où j_{r_i} est la distance de la rotule O à la normale à la trace du plan d'appui de r_i passant par ce nœud. Si l'on projette le contour (5-6-7- r_i'') du tracé de Williot (*fig. f'*) sur l'horizontale et sur la verticale, on trouve

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_h^{r_i} = (t_r)_h - \gamma_3 \sin a_{r_i} + \lambda^{r_i} \cos a_{r_i} \\ \text{et} \\ \Delta_v^{r_i} = (t_r)_v - \gamma_3 \cos a_{r_i} - \lambda^{r_i} \sin a_{r_i}. \end{array} \right.$$

Si l'on substitue dans ces expressions la valeur (10) du paramètre γ_3 et si l'on pose encore

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} V^{r-1} \sin a_{r_g} - H^{r-1} \cos a_{r_g} = L^{r-1}, \\ \Psi_r \lambda_r \left[1 + \frac{\cos(a_{r_g} - i)}{\cos(a_{r_i} - i)} \Phi_r \right] = \theta_r \quad \text{et} \quad \pi_r \frac{\cos(a_{r_i} - i)}{\sin(p - n)_r} = \lambda_r, \end{array} \right.$$

on peut écrire finalement

$$(15) \quad \omega_{r_i} = \frac{1}{E \sigma_{r-1}} \frac{l_{r-1}}{j_{r_i}} \frac{\lambda_r L^{r-1} - \theta_r}{\pi_r^2}.$$

On constate que ω_{r_i} est indépendant de la translation d'ensemble t_r du panneau r . Ceci est évident, car t_r étant parallèle à la surface d'appui en r_i , sa projection sur la normale à celle-ci est nulle.

On déduit de même du tracé de Williot (*fig. 7, f*), par projection, sur l'horizontale et sur la verticale, du contour (5-9-1- r_e'') :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_h^{r_e} = (t_r)_h - \lambda^{r_d} \cos a_{r_d} + \gamma_1 \sin a_{r_d} \\ \text{et} \\ \Delta_v^{r_e} = (t_r)_v + \lambda^{r_d} \sin a_{r_d} + \gamma_1 \cos a_{r_d}. \end{array} \right.$$

De la rotation ω_{r_i} , il résulte les corrections ($-\omega_{r_i} x$) de la projection verticale de la déformée du tronçon à $(r-1)$ panneaux prolongée dans le panneau r à l'aide du tracé de Williot de la figure 7, *f*, et les corrections ($-\omega_{r_i} y$) de la projection horizontale de cette déformée. Si l'on mesure les projections de la déformée ainsi corrigées, à

l'échelle $k_r \Delta_r^r = \Delta_r^r$ du rapprochement des lèvres du montant r produit par les forces de traction $k_r = 1$, on obtiendra les lignes d'influence des efforts normaux dans le montant r pour des charges verticales et pour des forces horizontales. D'après la formule (2), le rapprochement Δ_r^r s'exprime comme suit :

$$(17) \quad \Delta_r^r = \Delta_r^r + \frac{l_r}{E \sigma_r} = \frac{l_r}{E \sigma_r} \frac{\varpi_r}{\rho_r},$$

si l'on tient compte de la première des formules (12) et si l'on pose, en plus

$$(17') \quad \alpha_r + \beta_r = \varepsilon_r \quad \text{et} \quad \varepsilon_r + N^{r-1} = \varpi_r.$$

On notera que Δ_r^r n'est pas influencé par la rotation ω_{r_i} .

De ce qui précède, il résulte que l'on peut écrire les équations de récurrence suivantes entre $V_{(x, y)}^r$ et $V_{(x, y)}^{r-1}$ d'une part et entre $H_{(x, y)}^r$ et $H_{(x, y)}^{r-1}$ d'autre part :

1° Pour les nœuds $(x, y)_{e, i}$ des membrures extérieure ou intérieure et des $(r-1)$ premiers montants :

$$V^r(x, y) = \frac{k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} V^{r-1}(x, y) - \omega_{r_i} x}{\Delta_r^r}$$

et

$$H^r(x, y) = \frac{k_{r-1} \Delta_{r-1}^{r-1} H^{r-1}(x, y) - \omega_i y}{\Delta_r^r}.$$

2° Pour le nœud r_e du montant r :

$$V_{r_e}^r = \frac{\Delta_{r_e}^{r_e} - \omega_{r_i} x_{r_e}}{\Delta_r^r} \quad \text{et} \quad H_{r_e}^r = \frac{\Delta_{r_e}^{r_e} - \omega_{r_i} y_{r_e}}{\Delta_r^r}.$$

3° Pour le nœud r_i du montant r :

$$(17'') \quad V_{r_i}^r = \frac{\Delta_{r_i}^{r_i} - \omega_{r_i} x_{r_i}}{\Delta_r^r} \quad \text{et} \quad H_{r_i}^r = \frac{\Delta_{r_i}^{r_i} - \omega_{r_i} y_{r_i}}{\Delta_r^r}.$$

Si l'on tient compte des relations (5), (15), (17), (13) et (16), des expressions (3'), (3''), (11), (14) et (17'), et si l'on remplace les λ (pris en valeur absolue) et y_1, y_3 par leurs valeurs tirées, les

premières des expressions (2'') et (2'), les secondes des expressions (9) et (10), les équations de récurrence ci-dessus se mettent sous les formes définitives suivantes :

Pour les nœuds $(x, y)_{e,i}$ des montants $0, 1, \dots, r-1$,

$$\varpi_r V_{x_{e \text{ ou } i}}^r = \frac{x}{j_{r_i}} (\theta_r - \lambda_r L^{r-1}) - \pi_r V_{x_{e \text{ ou } i}}^{r-1}$$

et

$$\varpi_r H_{y_{e \text{ ou } i}}^r = \frac{y}{j_{r_i}} (\theta_r - \lambda_r L^{r-1}) - \pi_r H_{y_{e \text{ ou } i}}^{r-1}.$$

(B) Pour le nœud r_i du montant r ,

$$\varpi_r V_{r_i}^r = \delta_r L^{r-1} - \beta_r - \pi_r V_{r-1_i}^{r-1} \quad \text{et} \quad H_{r_i}^r = -V_{r_i}^r \cot i.$$

Pour le nœud r_e du montant r ,

$$\varpi_r V_{r_e}^r = \varphi_r + \nu_r V^{r-1} - \omega_r H^{r-1} - \pi_r V_{r-1_e}^{r-1}$$

et

$$\varpi_r H_{r_e}^r = \tau_r + \zeta_r V^{r-1} - \xi_r H^{r-1} - \pi_r H_{r-1_e}^{r-1}.$$

Si l'on pose, en plus des expressions (3'), (3''), (11), (14) et (17'), successivement les suivantes :

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} \pi_r \frac{\sin i \sin (\omega_i - \alpha_i)_r}{\sin (p-n)_r \cos (\omega_{r_i} - i)} = \delta_r, \\ \frac{\cos \alpha_{r_i}}{\cos (\alpha_{r_i} - i)} \lambda_r \Psi_r \left(1 + \Phi_r \frac{\cos \alpha_g}{\cos \alpha_i} \right)_r - \left(\frac{x_i}{j_i} \right)_r \theta_r = \beta_r, \\ \theta_r \frac{x_{r_e}}{j_{r_i}} + \beta_r \left(1 + \frac{\cos \alpha_{r_d}}{\cos \alpha_{r_e}} \Omega_r \right) = \varphi_r, \quad \left(\frac{h}{e} \frac{l_e}{l_i} \right)_r \mathcal{E}_r = \mathcal{K}_r, \\ \frac{\cos \alpha_{r_d} \sin \alpha_{r_e}}{\cos (\alpha_{r_i} - i)} \frac{\mathcal{K}_r}{\mathcal{E}_r} = \omega_r, \quad \lambda_r \left(\omega_r - \frac{x_{r_e}}{j_{r_i}} \sin \alpha_{r_g} \right) = \nu_r, \\ \lambda_r \left(\omega_r \cot \alpha_{r_e} - \frac{x_{r_e}}{j_{r_i}} \cos \alpha_{r_g} \right) = \omega_r, \\ \frac{y_{r_e}}{j_{r_i}} \theta_r + \beta_r \tan \alpha_{r_e} \left(1 + \frac{\sin \alpha_{r_d}}{\sin \alpha_{r_e}} \Omega_r \right) = \tau_r, \\ \lambda_r \left(\omega_r \tan \alpha_{r_d} - \frac{x_{r_e}}{j_{r_i}} \sin \alpha_g \right) = \zeta_r \\ \text{et} \\ \lambda_r \left(\omega_r \cot \alpha_{r_e} \tan \alpha_{r_d} - \frac{y_{r_e}}{j_{r_i}} \cos \alpha_g \right) = \xi_r. \end{array} \right.$$

On a substitué x ou y à (xy) dans V_x^r, V_x^{r-1}, H_y^r et H_y^{r-1} , car les V et H ne sont, du moins *explicitement*, respectivement fonctions que des coordonnées x ou y .

Nous avons remplacé l'équation de récurrence relative à $H_{r_i}^r$ par l'équation suivante :

$$(19) \quad \sin i H_{r_i}^r + \cos i V_{r_i}^r = 0.$$

Celle-ci exprime que l'effort normal développé dans le montant r d'extrémité de droite du tronçon à r panneaux, par une force appliquée au nœud r_i normalement à la trace du plan d'appui fictif de ce nœud, est nul. Ceci est évident, car cette force est entièrement reprise par l'appui et ne sollicite aucunement la construction. D'ailleurs, on peut montrer que, si l'on calcule $H_{r_i}^r$ directement comme on a calculé $V_{r_i}^r$ et si l'on forme la combinaison linéaire (19) entre l'équation (B) de $V_{r_i}^r$ et l'équation analogue trouvée pour $H_{r_i}^r$, cette combinaison linéaire se met sous la forme

$$\sin i H_{r_i}^r + \cos i V_{r_i}^r = A_r (\sin i \underline{H_{r-1}^{r-1}}_i + \cos i \underline{V_{r-1}^{r-1}}_i),$$

où A_r est un coefficient fonction seulement des éléments géométriques du panneau r . On voit que cette équation est identiquement vérifiée une fois que l'équation générale (19) est elle-même vérifiée, ce qui doit avoir lieu.

Calcul de δ_r . — Il nous reste, dans cette première phase de la démonstration, à calculer la valeur de la composante δ_r du déplacement de r_e par rapport à r_i , normale au montant r et dirigée vers le panneau $(r+1)$, car elle nous servira dans la suite. Cette composante δ_r est égale à la composante δ'_r [formule (12) et figure 7, f] normale au montant r , affectée de la correction due à la rotation ω_{r_i} d'ensemble du tronçon à r panneaux, nécessaire pour ramener le nœud r_i sur son plan d'appui fictif. On a, par suite,

$$\delta_r = \delta'_r - \omega_{r_i} l_r.$$

Si l'on remplace δ'_r et ω_{r_i} par leurs expressions (12) et (15), puis K^{r-1} par son expression évidente (11) et si l'on pose successivement, en

plus des expressions (11) et (14), les suivantes :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{l_r}{f_{r_i}} \frac{\lambda_r}{\pi_r} = \mathcal{V}_r, \quad \frac{l_r}{l_{r-1}} \cos a_{r-1} + \mathcal{U}_r \sin a_{r-1} + \mathcal{V}_r \sin a_{r_g} = \mathcal{G}_r, \\ \frac{l_r}{l_{r-1}} \sin a_{r-1} - \mathcal{U}_r \cos a_{r-1} - \mathcal{V}_r \cos a_{r_g} = \mathcal{H}_r \\ \text{et} \\ \mathcal{G}_r V^{r-1} + \mathcal{H}_r H^{r-1} - \mathcal{V}_r \frac{\theta_r}{\lambda_r} = \mathcal{N}_r, \end{array} \right.$$

on peut écrire δ_r sous la forme

$$(21) \quad \delta_r = - \frac{l_{r-1}}{E \sigma_{r-1}} \frac{\mathcal{N}_r}{\pi_r}.$$

B. Lignes d'influence, pour des forces extérieures de direction quelconque, du montant d'extrémité s' du tronçon à s panneaux, qui se trouve à droite de ce montant et dont le panneau d'extrémité de gauche au moins est à montants et croix de Saint-André. Formules de récurrence. — A première vue, les formules de récurrence (B) ne paraissent pas applicables aux tronçons de droite de l'arc, que l'on supposerait par exemple retournés autour d'un axe vertical, car l'appui O' est mobile, tandis que O est fixe. Nous montrerons cependant dans la suite (*voir* ci-après la seconde phase) que nous pouvons faire l'hypothèse d'un appui fixe à rotule en O' , moyennant certaines corrections. Les lignes d'influence partielles des tronçons de gauche et de droite séparés par le montant r considéré, sont en effet uniquement des lignes d'influence auxiliaires. C'est ce que nous montrerons dans la suite. Nous pouvons donc choisir pour les lignes d'influence auxiliaires des tronçons de droite celles correspondant à un appui fixe en O' , quitte après coup à faire la correction nécessaire. *Nous verrons que celle-ci est très simple par suite du type d'appui que nous avons choisi aux nœuds inférieurs des montants d'extrémités successifs des tronçons de gauche et de droite. C'est en vue de cette simplification que nous avons choisi ce type d'appui, qui consiste, comme nous l'avons vu, en un plan dont la trace dans le plan moyen de la ferme est une parallèle à la ligne OO' des appuis de l'arc entier à n panneaux.*

Il suffira dès lors d'appliquer purement et simplement les formules de récurrence (B) aux tronçons de droite retournés. Quelques recommandations sont cependant nécessaires :

a. Les seules lignes d'influence qui nous intéressent sont celles qui

correspondent à l'arc entier à n panneaux. On gardera notamment pour les forces extérieures horizontales qui peuvent solliciter la ferme, un seul et unique sens positif, dans toute l'étendue de cette dernière. Ce sens sera nécessairement dirigé vers la droite, car nous l'avons supposé ainsi dans l'étude précédente des fermes partielles formées des panneaux de gauche de l'arc complet. Voyons à présent ce qu'il en résulte pour les fermes partielles constituées par les panneaux de droite de celui-ci. Lors du retournement de celles-ci autour d'un axe vertical, le sens des forces horizontales s'inverse. Il est donc nécessaire si l'on veut appliquer les formules (B), de changer aussi le sens positif des forces horizontales ou, ce qui revient au même, de changer le signe de toutes les forces H qui interviennent dans les formules (B). Il faut remarquer que les H une fois changés de signe, il n'est pas nécessaire de changer le signe de l'effort

$$H^s = H_{s_e}^s - H_{s_i}^s$$

développé dans le montant quelconque s d'extrémité du tronçon à s panneaux, par un couple de forces extérieures unitaires horizontales, opposées et appliquées, l'une en s_e , l'autre en s_i . Il suffira donc, soit de changer le signe de $H_{s_e}^s$ et $H_{s_i}^s$ partout où ils interviennent seuls, soit de changer seulement le signe de H^s là où ils se présentent par couples de la forme ci-dessus.

Rappelons que les numéros d'ordre des montants, des nœuds et des panneaux sont comptés à partir de l'extrémité de gauche dans les fermes partielles formées des panneaux de la ferme totale situés à gauche du montant étudié et dans les fermes partielles, *retournées*, formées des panneaux de la ferme totale situés à droite de ce montant. C'est ce que nous avons indiqué sur la figure 8 (*a* et *b*). Par conséquent, dans les fermes partielles de droite *non retournées*, les numéros d'ordre sont comptés à partir de l'extrémité de droite de la ferme entière à n panneaux.

b. Dans le retournement des fermes partielles de droite, on changera le signe de l'inclinaison i de la ligne des appuis sur l'horizontale, car si i est une rampe pour les tronçons de gauche, il est une pente pour ceux de droite *retournés*, et vice versa.

c. On remarquera que les diagonales inclinées à gauche avant

retournement, le sont à droite après retournement et réciproquement. On en tiendra compte dans les valeurs des longueurs $l_{d,g}$ et des sections $\sigma_{d,g}$ des diagonales, qui sont interchangées dans un même panneau (*fig.* 8, a et b).

d. Quant aux angles propres p, q, m, n des panneaux successifs, on peut directement écrire entre eux les relations générales suivantes :

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} (q - m)'_s = \pi - (q + n)_{\underline{n-s+1}}, \quad (p - n)'_s = \pi - (p + m)_{\underline{n-s+1}}, \\ m'_s = (n - b)_{\underline{n-s+1}}, \quad n'_s = (m + b)_{\underline{n-s+1}}, \quad q'_s = \pi - (q + b)_{\underline{n-s+1}} \\ \text{et} \\ p'_s = \pi - (p - b)_{\underline{n-s+1}}, \end{array} \right.$$

dans lesquelles les exposants ($'$) des premiers membres rappellent que ceux-ci se rapportent aux tronçons de droite retournés (*fig.* 8, a et b). Les valeurs des premiers membres ont trait, en effet, au panneau s de la ferme entière à n panneaux, *retournée*, et leurs indices sont comptés à partir de l'extrémité de gauche de celle-ci. Au contraire, les valeurs des seconds membres se rapportent *au même panneau* mais, cette fois, dans la ferme entière *non retournée*. Leurs indices sont comptés à partir de l'extrémité de gauche de celle-ci.

Quant à b , il change seulement d'indice, mais non de signe :

$$(22') \quad b'_s = b_{\underline{n-s+1}}.$$

e. On a encore, entre les angles d'inclinaison des barres sur l'horizontale, les relations suivantes, avec la même correspondance :

$$a'_{s,i,e,g,d} = 2\pi - a_{\underline{n-s+1},i,e,d,g} \quad \text{et} \quad a'_s = \pi - a_{\underline{n-s}}.$$

On a tenu compte de la permutation des indices des angles d'inclinaison des diagonales et, en outre, du nœud par lequel doit toujours être menée l'horizontale origine de l'angle d'inclinaison de la barre considérée : $\underline{s-1}'_e$ pour $a'_{s'e}$ et $a'_{s'g}$; $\underline{s-1}'_i$ pour $a'_{s'd}$ et $a'_{s'i}$ et s'_i pour $a_{s'i}$. Ceci est en effet indispensable afin de pouvoir appliquer aux tronçons de droite les formules de récurrence (B) établies plus haut pour les tronçons de gauche.

f. Enfin, on aura soin, dans un même panneau, de permuter (e et f) d'une part, (g et h) d'autre part.

En résumé, toutes les recommandations exposées ci-dessus ont pour but de faciliter l'obtention de tous les éléments de la ferme retournée (*fig. 8, b*) en les déduisant directement de ceux, déjà connus, de la ferme non retournée (*fig. 8 a*). Ces éléments servent ensuite au calcul des lignes d'influence partielles des montants successifs considérés comme montants d'extrémité de gauche des fermes partielles situées à leur droite dans la ferme entière non encore retournée.

On appliquera à cette fin les formules de récurrence (B), en indiquant par l'exposant (') qu'il s'agit des tronçons de droite.

Calcul de $\delta_{s'}$. — Il s'agit de la composante, normale au montant s' et dirigée vers le panneau ($s' + 1$) dans le tronçon de droite retourné, du déplacement *relatif* des nœuds $s_{e'}$ et $s_{i'}$. On peut appliquer directement l'équation (21) établie pour δ_r dans le cas du tronçon de gauche à r panneaux. Dans la suite de notre exposé, nous aurons à utiliser $\delta_{s'}$ uniquement dans le cas de $s' = (n - r)'$. Nous écrirons donc $\delta_{s'}$ directement pour le cas, quelconque d'ailleurs, du montant $(n - r)'$ compté à partir de l'appui de droite O' ou r compté à partir de l'appui de gauche O . On a, d'après la formule (21) :

$$\delta_{(n-r)'} = \frac{l_{(n-r-1)'}}{E \sigma_{(n-r-1)'}} \frac{\mathfrak{M}_{(n-r)'}}{\pi_{(n-r)'}}$$

où l'on fait usage des notations (') annoncées ci-dessus.

Cependant, pour permettre une application plus aisée des formules de la seconde phase ci-après, nous exprimerons tous les coefficients des efforts normaux dans le montant $(n - r - 1)'$ qui interviennent dans l'expression de $\delta_{(n-r)'}$ et en particulier dans $\mathfrak{M}_{(n-r)'}$ [voir l'expression de $\mathfrak{M}_r$ dans les formules (20)], en fonction seulement des éléments de la ferme *non retournée*. Ces éléments sont mesurés à partir de l'extrémité de gauche de celle-ci. On aura ainsi des coefficients d'un seul genre, ce qui facilitera l'application des formules.

Pour cela, on a mis en pratique les recommandations qui ont été faites plus haut (alinéas *a* à *f*). Finalement, on a trouvé

$$(23) \quad \delta_{(n-r)'} = + \pi_{r+1} \frac{l_{r+1}}{E \sigma_{r+1}} \mathcal{E}_{r+1},$$

en posant successivement, en plus des expressions (3''), (11) et (14),

les suivantes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda_r}{\pi_r} \frac{h_r}{g_r} \frac{l_{r-1}}{j_{n-r-1}} = \mathcal{C}_r, \\
 & \frac{l_{r-1}}{l_r} (\cos a_r + \pi_r \mathcal{U}_r \sin a_r) + \mathcal{C}_r \sin a_{r_d} = \mathcal{J}_r, \\
 & \frac{l_{r-1}}{l_r} (\sin a_r - \pi_r \mathcal{U}_r \cos a_r) - \mathcal{C}_r \cos a_{r_d} = \mathcal{J}_r, \\
 (24) \quad & \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{\Psi_r}{\sin(p-n)_r} \frac{\pi_r}{\rho_r} \left(\frac{h}{g} \right)_r \\ &\times \left[\frac{g}{f} \frac{l_r}{l_i} \cos(q+b) - \Omega_r \frac{\mathcal{K}_r}{\mathcal{E}_r} \frac{\sigma_g}{\sigma_d} \cos(n-b) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(p-b)}{\mathcal{K}_r} + \Phi_r \cos(m+b)_r \right], \\ &\frac{\pi_r}{\rho_r} \frac{\Psi_r}{\mathcal{K}_r} \left[1 + \frac{\cos(a_d-i)}{\cos(a_i-i)} \Phi_r \mathcal{K}_r \right] = \mathcal{S}_r, \end{aligned} \right. \\
 & \text{et} \\
 & \mathcal{J}_r V^{(n-r)'} + \mathcal{J}_r H^{(n-r)'} - \mathcal{E}_r + \mathcal{S}_r \mathcal{C}_r = \mathcal{L}_r,
 \end{aligned}$$

dans lesquelles toutes les valeurs, sauf les efforts internes $H^{(n-r)}$ et $V^{(n-r)'}$, sont comptées dans les fermes partielles de gauche, de la ferme non retournée.

Calcul du rapprochement $\Delta_{s'}^{s'}$ des nœuds s_e et s_v . — Nous calculerons de même $\Delta_{s'}^{s'}$ pour $s' = (n-r)'$. Nous pouvons encore déduire ce rapprochement directement de l'expression (12) de Δ_r' établie pour la ferme partielle de gauche à r panneaux, à l'aide de transformations analogues à celles utilisées pour $\delta_{(n-r)'}'$. On obtient finalement

$$(25) \quad \Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} = \frac{l_r}{E \sigma_r} \mathcal{U}_{r-1},$$

si l'on pose, en plus des expressions (3'') et (11), la suivante :

$$(26) \quad \mathcal{A}_r + \rho_r N_{n-r}' = \mathcal{U}_r,$$

dans laquelle toutes les valeurs, à part N_{n-r}' , sont comptées dans les fermes partielles de gauche non retournées. On peut ensuite déduire de la formule (25) le rapprochement $\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'}$ des lèvres de la coupure du montant $(n-r)'$ d'extrémité du tronçon de droite à $(n-r)$ panneaux, produit par deux tractions unitaires de ces lèvres. Ce rapprochement s'écrit, d'après la formule (2),

$$(27) \quad \Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} = \frac{l_r}{E \sigma_r} (1 + \mathcal{U}_{r+1}).$$

Nous montrerons ci-après, dans la seconde phase du calcul des formules de récurrence, que les composantes $\delta_{(n-r)'}'$ et $\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'}$ du déplacement *relatif* des nœuds $(n-r)'_e$ et $(n-r)'_i$ d'extrémités du montant $(n-r)'$ ne sont pas influencées par les corrections de la déformée individuelle du tronçon de droite que l'on a supposé tout d'abord fixé en O' . Nous verrons en effet que *ces corrections se réduisent à une translation d'ensemble de ce tronçon : les appuis $(n-r)'_i$ et O' de ce dernier se déplacent sur les traces parallèles, dans le plan de la ferme, de leurs plans d'appuis parallèles*. C'est pourquoi nous avons calculé $\delta_{(n-r)'}'$ et $\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'}$ dans le tronçon supposé à appui fixe à rotule en O' .

C. Résumé de la première phase du calcul des formules de récurrence entre les lignes d'influence des montants surabondants. — Les formules de récurrence que nous venons d'établir au cours de la première phase nous permettront de calculer les lignes d'influence partielles, pour des forces verticales et pour des forces horizontales, des montants surabondants successifs $(1, 2, \dots, n)$ considérés une première fois comme montants d'extrémités de droite des fermes partielles constituées par les panneaux qui se trouvent à leur gauche, et une seconde fois comme montants d'extrémités de gauche des fermes partielles constituées par les panneaux qui se trouvent à leur droite.

Les lignes d'influence des montants n et n' d'extrémités de droite et de gauche de la ferme entière à n panneaux, sont seules définitives. Cependant, toutes les lignes d'influence partielles seront directement utilisables pour la détermination de celles des montants intermédiaires $(1, 2, \dots, n-1)$ surabondants considérés tels qu'ils se présentent dans la réalité, c'est-à-dire comme faisant partie de la ferme entière à n panneaux.

Il reste à établir les valeurs de départ de l'application des formules de récurrence (B) des lignes d'influence partielles. Pour cela, nous calculerons les valeurs de H et V relatives au système réduit au seul montant o d'extrémité. On a évidemment, dans ce montant existant seul et présentant un appui fixe en O (ou o_i) (*fig. 9, a, b, c, d*),

$$(28) \quad H_{o_i}^0 = 0, \quad V_{o_i}^0 = 0, \quad K^0 = 0 \quad \text{et} \quad N^0 = +1.$$

Or, on peut écrire :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{oe}^0 - H_{oi}^0 = K^0 \sin \alpha_0 - N^0 \cos \alpha_0 = - \cos \alpha_0 = H_{oe}^0 \\ \text{et} \\ V_{oe}^0 - V_{oi}^0 = K^0 \cos \alpha_0 + N^0 \sin \alpha_0 = + \sin \alpha_0 = V_{oe}^0, \end{array} \right.$$

ce qui détermine complètement un point de départ de l'application des formules de récurrence (B).

II. — DEUXIÈME PHASE.

Lignes d'influence définitives, pour des charges de directions quelconques, de l'effort normal dans un montant intermédiaire r quelconque, dans l'arc entier à n panneaux, dont l'appui O' est mobile et dont les panneaux r et $(r + 1)$ au moins sont à montants et croix de Saint-André. — Nous appliquerons encore le principe de Maxwell en coupant le montant r , en appliquant deux tractions unitaires aux lèvres de la coupure et en mesurant la déformée de l'arc, qui en résulte, à l'échelle du rapprochement des lèvres du montant r ainsi coupé et sollicité.

Or, nous pouvons scinder simultanément chacun des nœuds r_e et r_i en deux parties, à condition d'appliquer à ces dernières les composantes, suivant la direction du montant r et suivant les normales à ce montant, de leurs actions et réactions mutuelles, égales et opposées deux à deux.

Ces actions et réactions mutuelles se réduisent simplement à leurs composantes z , égales et opposées en r_e et r_i , dans la direction du montant r (*fig. 7, g*).

En effet, avant coupure des nœuds r_e et r_i , les seules forces extérieures qui agissent sur la ferme entière sont deux tractions égales et opposées appliquées aux lèvres du montant r coupé. Il en résulte que les forces et couples extérieurs de liaison sont nuls avant coupure des nœuds r_e et r_i , donc aussi après cette coupure et substitution des actions et réactions correspondantes. Le tronçon de gauche à r panneaux est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui le sollicitent : les réactions du tronçon à $(n - r)$ panneaux sur les nœuds r_e et r_i , et les tractions unitaires, égales et opposées des lèvres du montant r coupé. De même, le tronçon de droite à $(n - r)$

panneaux est en équilibre sous l'effet des actions du tronçon à r panneaux sur les nœuds r_e et r_i .

Si, à présent, on écrit l'équation d'équilibre statique des moments, pris par rapport au nœud r_i , des forces extérieures agissant sur le tronçon à r panneaux, on voit que les moments se réduisent à celui de la composante, normale au montant r , de la réaction en r_e . Le moment résultant doit être nul. Il en résulte que cette composante normale est nulle elle-même. Il s'ensuit que la composante, normale au montant r , de la réaction en r_i , est nulle elle aussi.

Par conséquent, les actions et réactions mutuelles, aux nœuds r_e et r_i , des tronçons à r et à $(n - r)$ panneaux, se réduisent seulement à leurs composantes z dans la direction du montant r (*fig. 7, g*). Ces composantes z sont en outre nécessairement égales et opposées en r_e et r_i , car les deux tronçons à r et à $(n - r)$ panneaux sont chacun en équilibre.

Cette propriété nous est indispensable. En effet, sans elle, il nous serait impossible d'établir, comme nous allons le faire ci-après, une relation entre les deux phases du calcul des lignes d'influence des montants surabondants, en ce sens qu'au lieu d'avoir un seul paramètre z à éliminer, nous en aurions eu deux.

Par la coupure des nœuds r_e et r_i , nous avons rendu libres l'un de l'autre les tronçons à r et à $(n - r)$ panneaux. Nous pouvons donc déterminer comme suit, *en quatre étapes*, la *déformée* de l'arc entier à n panneaux sollicité par deux tractions unitaires des lèvres du montant r et non scindé en r_e ni en r_i .

1. *Déterminer la déformée partielle du tronçon de gauche à r panneaux*, à appui fixe en O et à appui mobile en r_i sur un plan de trace parallèle à la ligne des appuis OO' de l'arc entier (*fig. 7, g*).

Cette *déformée* ne change pas si l'on transporte les deux forces répulsives z , en r_e et r_i , jusqu'aux lèvres du montant r coupé. On soumet ainsi celle-ci à deux tractions $(1 - z)$ égales et opposées. Par suite, on réalise en tous points la sollicitation utilisée lors de la recherche de la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant r par application du principe de Maxwell. D'après la formule (1'), la *déformée* de la ferme partielle à r panneaux a donc pour projections verticale et horizontale :

$$(30) \quad (1 - z) \Delta_r^r V_x^r \quad \text{et} \quad (1 - z) \Delta_r^r H_y^r,$$

où V_x^r est la ligne d'influence partielle du montant r d'extrémité de la ferme partielle pour des charges verticales, H_y^r , la ligne d'influence partielle du même montant pour des forces horizontales, Δ_r^r , le *rapprochement* des lèvres du montant r pour des tractions unitaires de ses lèvres, le montant étant considéré comme montant d'extrémité de droite de la ferme partielle à r panneaux [formule (17)] et $(1 - z)$, les tractions de ces lèvres.

Les lignes d'influence partielles V_x^r et H_y^r ont été calculées plus haut au cours de la première phase (A) [formules (B)].

En particulier, le nœud r_i se déplace verticalement vers le bas et horizontalement vers la droite, respectivement de

$$(31) \quad \Delta_v^{r_i} = (1 - z) \Delta_r^r V_{r_i}^r \quad \text{et} \quad \Delta_h^{r_i} = (1 - z) \Delta_r^r H_{r_i}^r,$$

dont la résultante est dirigée nécessairement suivant la trace du plan d'appui en r_i .

Le nœud r_e subit en outre, *par rapport à r_i* , un déplacement de composantes $(1 - z) \Delta_r^r$ et $(1 - z) \delta_r$ respectivement confondue avec la direction du montant r (rapprochement de r_e et r_i) et normale à celle-ci (vers le panneau $r + 1$) [voir formules (12) et (21)].

2. Déterminer la déformée partielle du tronçon de droite à $(n - r)$ panneaux, à appui O' supposé fixé et à appui mobile en r_i sur la trace du même plan d'appui que celui du nœud r_i du tronçon de gauche. L'appui O' est supposé fixé avant toute déformation des deux tronçons.

Cette *déformée* ne change pas si l'on introduit en r_e et r_i les segments, non sollicités par les tractions unitaires, du montant r coupé et si l'on transporte les forces attractives z jusqu'aux lèvres de ces segments. Mais on a encore une fois réalisé la sollicitation utilisée par application du principe de Maxwell, en vue de la détermination de la ligne d'influence du montant $(n - r)'$ d'extrémité de gauche de la ferme partielle de droite à $(n - r)$ panneaux. On voit que la *déformée* a pour projections verticale et horizontale [voir formule (1')]

$$(32) \quad z \Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} V_{x'}^{(n-r)'} \quad \text{et} \quad z \Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} H_{y'}^{(n-r)'},$$

où $V_{x'}^{(n-r)'}$ et $H_{y'}^{(n-r)'}$ sont les lignes d'influence du montant $(n - r)'$ d'extrémité du tronçon de droite calculées plus haut au cours de la première phase [formules (B)]. On tiendra compte des modifications

énoncées au paragraphe B ci-dessus (a à f') et l'on fera l'hypothèse d'un appui fixe à rotule en O' .

En particulier, le nœud $\underline{(n-r)'}_i$ subit un déplacement dont les composantes verticale vers le bas et horizontale vers la gauche (dans le tronçon supposé retourné) ou vers la droite (dans le tronçon en position réelle, non retournée), sont égales respectivement à [voir formule (1')]

$$(33) \quad \Delta_{\nu}^{n-r'} = z \Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} \underline{V}_{n-r'}^{(n-r)'} \quad \text{et} \quad \Delta_h^{n-r'} = z \Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} \underline{H}_{n-r'}^{(n-r)'}$$

Le déplacement résultant est nécessairement dirigé suivant la trace du plan d'appui en $\underline{n-r'}_i$.

Le nœud $\underline{n-r'}_e$ subit en outre, *par rapport à* $\underline{n-r'}_i$, un déplacement de composantes $z \Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} e$ (rapprochement des nœuds $\underline{n-r'}_e$ et $\underline{n-r'}_i$) et $z \delta_{(n-r)'}'$ [normalement au montant $(n-r)'$, vers le panneau $(n-r+1)'$ des tronçons de droite ou bien vers le panneau $(r-1)$ des tronçons de gauche]. On se reportera aux formules (23) et (25) précédemment établies.

3. *Produire une translation d'ensemble du tronçon de droite déformé*, après suppression de l'appui provisoirement fixé O' , parallèlement à OO' pour ramener le nœud $\underline{n-r'}_i$ en coïncidence avec le nœud r_i du tronçon de gauche déformé.

En effet, au cours des déformations des tronçons de gauche à r panneaux et de droite à $(n-r)$ panneaux, considérées aux alinéas 1 et 2 ci-dessus, dans la ferme entière à nœuds r_e et r_i scindés et à appuis initialement fixés en O et O' avant toute déformation, le nœud $\underline{n-r'}_i$ s'est déplacé *suitant la trace du plan d'appui auxiliaire en* r_i , par rapport au nœud r_i du tronçon de gauche déformé. Les composantes, verticale vers le bas et horizontale vers la droite, de ce déplacement relatif translatore de $\underline{n-r'}_i$ par rapport à r_i sont égales aux suivantes

$$(34) \quad -(\Delta_{\nu}^{n-r'} - \Delta_{\nu}^{r_i}) \quad \text{et} \quad -(\Delta_h^{n-r'} - \Delta_h^{r_i}),$$

mais sont de signes contraires à celles-ci. Elles se détermineront aisément à l'aide des relations (31), (33), (17) et (27).

Pour ramener r_i et $\underline{n-r'}_i$ en contact, après déformation des

fermes partielles de gauche et de droite, il faudra donc produire une translation d'ensemble de celle de droite, dont les composantes sont données en grandeur et en signe par les expressions (34).

4. *Produire une rotation d'ensemble de la ferme partielle de gauche, autour de l'appui fixe à rotule O, jusqu'à ramener en contact les deux lèvres de la coupure du nœud $r_e(n-r)_e$. Cette rotation engendrera une rotation d'ensemble de la ferme partielle de droite, autour de l'appui O' et, en raison de la mobilité de ce dernier, une translation d'ensemble de cette même ferme partielle parallèlement à la ligne OO' des appuis (fig. 7, h).*

Si l'on considère en effet le triangle *déformable* $(Or_i O')$ dont les côtés u_{r_i} et u'_{n-r_i} seuls sont invariables, on peut écrire, par différentiation de la formule bien connue

$$\frac{\sin(\omega_{r_i} - i)}{u'_{n-r_i}} = \frac{\sin(\omega'_{n-r_i} + i)}{u_{r_i}},$$

la relation finale suivante entre les accroissements infiniment petits des angles ω en O et O'

$$(35) \quad \frac{d\omega'_{n-r_i}}{d\omega_{r_i}} = \frac{\text{tang}(\omega'_{n-r_i} + i)}{\text{tang}(\omega_{r_i} - i)} = \frac{j_{r_i}}{j'_{n-r_i}} = \frac{\omega'}{\omega},$$

où ω est la relation d'ensemble, infiniment petite, du tronçon de gauche dans le sens trigonométrique. Nous produisons cette rotation. Il en résultera une rotation d'ensemble ω' du tronçon de droite, autour de l'appui O', rotation donnée par la formule (35) dans le sens des accroissements de l'angle en O', c'est-à-dire en sens inverse du sens trigonométrique.

D'autre part, l'angle d_r opposé à la portée inclinée $\overline{OO'} \equiv t$, suivant la ligne des appuis, dans le triangle $(Or_i O')$, décroît donc de $(\omega + \omega')$, c'est-à-dire que la portée t subit elle-même une *réduction*

$$(36) \quad dt = (\omega + \omega')v_{r_i} \quad \text{ou} \quad dt = \omega \frac{tv_{r_i}}{j'_{n-r_i}},$$

où v_{r_i} est la distance du nœud r_i à la ligne OO' des appuis.

En résumé, il résulte de la rotation ω :

a. Une rotation d'ensemble ω , autour de l'appui O, de la ferme partielle de gauche, dans le sens trigonométrique;

b. Une rotation d'ensemble ω' , autour de l'appui O', de la ferme

partielle de droite, en sens inverse (pour la ferme partielle non retournée);

c. Une translation d'ensemble dt , vers l'appui O et parallèlement à $\overline{OO'}$, de la ferme partielle de droite, translation de composantes horizontale ($-dt \cos i$) vers la droite et verticale ($+dt \sin i$) vers le bas, avec leurs signes.

Du fait de la rotation ω , les nœuds r_e et $(n-r)'_e$ se rapprochent donc de $(\omega + \omega') l_r$ dans la direction normale au montant r . *Ils se trouvent d'ailleurs sur la même perpendiculaire en r_e à ce montant.* En effet, les sollicitations z ne perturbent en rien l'état d'équilibre interne et de déformation des deux fermes partielles. Or, avant coupure des nœuds r_e et r_i en deux parties, le rapprochement de ceux-ci, dans la direction du montant r , est le même, qu'il soit compté à partir de la ferme partielle de gauche ou à partir de la ferme partielle de droite. Il en est de même après coupure des nœuds r_e et r_i . Par conséquent, nous sommes en possession d'une condition qui va nous permettre de déterminer le paramètre auxiliaire z . Cette condition s'exprime

$$(1-z)\Delta'_{r'} = z\Delta'^{(n-r)'}_{(n-r)'},$$

$\Delta'_{r'}$ et $\Delta'^{(n-r)'}_{(n-r)'}$ étant donnés par les formules (12) et (25). Elle n'est d'ailleurs pas influencée par les translations et rotations de corrections énumérées plus haut dans les alinéas 1, 2, 3 et dans le présent alinéa. Si l'on remplace $\Delta'_{r'}$ et $\Delta'^{(n-r)'}_{(n-r)'}$ par leurs expressions (12) et (25), l'équation précédente en z peut s'écrire comme suit :

$$(37) \quad \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha_r + N^{r-1}}{\rho_r \partial \mathcal{U}_{r+1}},$$

seule forme sous laquelle elle nous servira dans la suite pour éliminer z des équations de récurrence.

D'autre part, le déplacement *relatif* des nœuds r_e et r_i a pour composantes normales au montant r : d'une part, dans la ferme partielle de gauche : $(1-z)\delta_r$ dirigé vers le panneau $(r+1)$ de cette ferme; d'autre part dans la ferme partielle de droite : $z\delta_{(n-r)'}$ dirigé vers le panneau $(n-r+1)'$ de cette ferme ou vers le panneau r de la ferme partielle de gauche. Comme les lèvres de la coupure du nœud r_i ont été ramenées en contact, le déplacement relatif total des lèvres r_e et $\underline{n-r'}_e$ de la coupure du nœud r_e

normalement au montant r , est égal à la somme des déplacements relatifs précédents, c'est-à-dire égal à

$$(1 - z)\delta_r + z\delta_{(n-r)'}$$

Ce déplacement n'a subi aucune modification du fait des translations d'ensemble (34) et (36) du tronçon de droite. Par contre, il a subi la réduction $(\omega + \omega')l_r$ du fait de la rotation ω de la ferme partielle de gauche et de la rotation ω' de la ferme partielle de droite, occasionnée par la première. ω et par suite ω' , seront déterminées par le fait qu'il faut ramener en contact r_e et $(n - r)'_e$, c'est-à-dire par la relation

$$(\omega + \omega')l_r = (1 - z)\delta_r + z\delta_{(n-r)'}$$

ou encore, en tenant compte de la formule (35) et de la figure 7 h ,

$$(38) \quad \omega = \frac{j'_{n-r}}{tl_r} [(1 - z)\delta_r + z\delta_{(n-r)'}]$$

ω' et dt sont dès lors déterminés par leurs expressions (35) et (36) en fonction de ω .

La translation totale de correction de la *déformée* de la ferme partielle de *droite* aura pour composantes verticale vers le bas et horizontale vers la droite, avec leurs signes, respectivement

$$\Delta_v^{r_i} - \Delta_v^{n-r'_i} + dt \sin i \quad \text{et} \quad \Delta_h^{r_i} - \Delta_h^{n-r'_i} - dt \cos i.$$

La *déformée* de la même ferme partielle subira en outre, par suite de la rotation d'ensemble ω' , les corrections verticales $-\omega'x'$ et horizontales $+\omega'y'$, x' et y' étant l'abscisse et l'ordonnée du nœud considéré, prises par rapport à l'appui O' (fig. 7, a). Ces corrections seront proportionnelles aux coordonnées x' et y' des nœuds considérés, tandis que les corrections de translation seront équipollentes en tous les nœuds.

Quant au tronçon de gauche, sa *déformée* subit les seules corrections verticales et horizontales $-\omega x$ et $-\omega y$, du fait de la rotation d'ensemble ω .

5. *Résumé des alinéas 1, 2, 3, 4.* — En conclusion, pour déterminer la déformée de la ferme entière à n panneaux produite par deux tractions unitaires des lèvres du montant quelconque r coupé, on affectera les projections verticales et horizontales des

déformées individuelles (30) et (32) des fermes partielles à r et à $(n - r)$ panneaux, des corrections suivantes :

Corrections de la déformée individuelle (30) de la ferme partielle de gauche à r panneaux :

Correction verticale vers le bas..... $-\omega x$

Correction horizontale vers la droite..... $-\omega y$

Corrections de la déformée individuelle (32) de la ferme partielle de droite à $(n - r)$ panneaux :

Correction verticale vers le bas :

$$\Delta_v^{r_i} - \Delta_v^{n-r'_i} + dt \sin i - \omega' x'.$$

Correction horizontale vers la droite :

$$\Delta_h^{r_i} - \Delta_h^{n-r'_i} - dt \cos i + \omega' y'.$$

Il est évident que les translations et rotations de corrections des déformées ne font naître dans les barres de la ferme aucun effort interne autre que ceux qui y existent déjà du fait des sollicitations $(1 - z)$ et z .

On substituera dans ces corrections les expressions (31), (33), (38), (35) et (36) des Δ , de ω , de ω' et de dt . Quant aux déformées individuelles (30) et (32), on a vu qu'elles s'expriment en fonction des lignes d'influence du montant r déterminées au préalable au cours de la première phase du calcul (§ A et B).

Si l'on mesure ces *déformées* corrigées, à l'échelle du rapprochement des lèvres du montant r coupé, produit par les deux tractions unitaires de ces lèvres, on obtiendra la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant intermédiaire r considéré tel qu'il se présente en réalité, c'est-à-dire comme faisant partie de la ferme entière à n panneaux. On a déjà montré que le rapprochement des lèvres du montant r est le même, qu'il soit déduit de la déformation de la ferme partielle de gauche ou de celle de la ferme partielle de droite. Il peut donc s'écrire, d'après la formule (2),

$$E_r = (1 - z) \Delta_r' \text{ (ou } z \Delta_{(n-r')}^{(n-r')} \text{)} + \frac{l_r}{E \sigma_r},$$

Si l'on désigne par Q les lignes d'influence des montants intermédiaires *pour des forces extérieures verticales unitaires, positives vers le bas* et appliquées aux différents nœuds $(x, y)_{e,i}$ de la membrure extérieure ou intérieure, et par R les lignes d'influence de

ces mêmes montants *pour des forces extérieures horizontales, unitaires, positives vers la droite*, on pourra donc écrire :

1. *Pour les nœuds $(x, y)_{e,i}$ des membrures extérieure ou intérieure de la ferme partielle de gauche à r panneaux*

$$Q_x^r = \frac{(1-z)\Delta_r^r V_{r'}^r - \omega x}{(1-z)\Delta_r^r + \frac{l_r}{E\sigma_r}},$$

$$R_y^r = \frac{(1-z)\Delta_r^r H_{r'}^r - \omega y}{(1-z)\Delta_r^r + \frac{l_r}{E\sigma_r}}.$$

2. *Pour les nœuds $(x', y')_{e,i}$ des membrures extérieure ou intérieure de la forme partielle de droite à $(n-r)$ panneaux :*

$$Q_{(n-r)'}^{(n-r)'} = \frac{z\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} [V_{x'}^{(n-r)'} - \underline{V}_{(n-r)'}^{(n-r)'}] + (1-z)\Delta_r^r V_{r_i}^r + \frac{\omega}{j_{n-r_i}} (tv_{r_i} \sin i - x' j_{r_i})}{z\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} + \frac{l_r}{E\sigma_r}},$$

$$R_{y'}^{(n-r)'} = \frac{z\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} [H_{y'}^{(n-r)'} - \underline{H}_{(n-r)'}^{(n-r)'}] + (1-z)\Delta_r^r H_{r_i}^r - \frac{\omega}{j_{n-r_i}} (tv_{r_i} \cos i - y' j_{r_i})}{z\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} + \frac{l_r}{E\sigma_r}}.$$

Si l'on remarque que d'après la formule générale (2), on a les relations suivantes :

$$(1-z)\Delta_r^r + \frac{l_r}{E\sigma_r} = (1-z)\Delta_r^r + \frac{z l_r}{E\sigma_r},$$

$$z\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} + \frac{l_r}{E\sigma_r} = z\Delta_{(n-r)'}^{(n-r)'} + (1-z)\frac{l_r}{E\sigma_r},$$

et si l'on pose encore

$$(39) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_r + N^{r-1}}{\varpi_r \mathcal{E}_{r+1}} = k_r, \quad \frac{j_{n-r_i}'}{tl_r'} \left(\frac{\rho_{r+1}}{\pi_{r+1}} k_r \mathcal{E}_{r+1} - \frac{\pi_r \mathfrak{M}_r}{\varpi_r} \right) = \Delta_r, \\ 1 + k_r = \mu_r, \quad \frac{1}{k_r(1 + \mathcal{E}_{r+1})} = \kappa_r, \\ \Delta_r \kappa_r \frac{j_{r_i}}{j_{n-r_i}} = \theta_r, \quad \text{et} \quad 1 + \frac{\rho_r \kappa_r}{\varpi_r} = \Sigma_r, \end{array} \right.$$

on peut écrire les équations précédentes sous les formes (C) et (D) ci-dessous.

En conclusion de la première partie du calcul, nous rassemblerons en un seul tableau (A) les expressions suivantes que nous avons posées au cours de notre exposé, en (2'), (3'), (3''), (11), (14), (17'), (18), (20) et (39) :

(A)

$$\begin{aligned}
 \pi_r &= \frac{l_r}{l_{r-1}} \frac{he}{gf}, & \lambda_r &= \pi_r \frac{\cos(a_i - i)}{\sin(p - n)}, & \Psi_r &= \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_g} \frac{e}{f} \frac{l_d l_g}{l_{r-1}^2}, \\
 \Phi_r &= \frac{\sigma_g}{\sigma_i} \frac{f}{g} \frac{l_i^2}{l_d l_g}, & \Omega_r &= \frac{\sigma_d}{\sigma_e} \frac{g}{f} \frac{l_e^2}{l_d l_g}, & \Lambda_r &= \frac{\sigma_{il}}{\sigma_g} \left(\frac{ge}{hf} \right)^2 \frac{l_d}{l_g}, \\
 \mathcal{E}_r &= \Lambda_r \frac{f}{g} \frac{l_g}{l_d} \frac{l_i}{l_e}, & \mathcal{K}_r &= \mathcal{E}_r \frac{h}{e} \frac{l_e}{l_i}, & \theta_r &= \Psi_r \lambda_r \left[1 + \frac{\cos(a_g - i)}{\cos(a_i - i)} \Phi_r \right], \\
 \varphi_r &= \pi_r^2 \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_r} \frac{l_r}{l_{r-1}}, & \alpha_r &= \frac{\sigma_{r-1}}{l_{r-1}^3} \left(\frac{l_i^3}{\sigma_i} \frac{e^2}{g^2} + \frac{l_e^3}{\sigma_e} \frac{h^2}{f^2} \right), \\
 \gamma_r &= \frac{e}{f} \frac{l_d}{l_{r-1}} \frac{\Psi_r}{\Lambda_r} (1 + \Lambda_r), & \mathcal{A}_r &= \alpha_r + \gamma_r, & \varepsilon_r &= \mathcal{A}_r + \rho_r, \\
 \Pi_r &= \Pi_{r_e}^r - \Pi_{r_i}^r, & \mathcal{V}_r &= \mathcal{V}_{r_e}^r - \mathcal{V}_{r_i}^r, & \mathcal{N}_r &= \mathcal{V}_r \sin a_r - \Pi_r \cos a_r, \\
 \omega_r &= \varepsilon_r + \mathcal{N}_r^{-1}, & \delta_r &= \pi_r \frac{\sin i \sin(\omega_i - a_i)}{\sin(p - n) \cos(\omega_i - i)}, \\
 \beta_r &= \frac{\lambda_r \Psi_r}{\cos(a_i - i)} \left(1 + \frac{\cos a_g}{\cos a_i} \Phi_r \right) - \frac{x_i}{j_i} \theta_r, & \mathcal{B}_r &= \frac{\Psi_r \pi_r}{\mathcal{E}_r} \frac{\cos a_e}{\sin(p - n)}, \\
 \varphi_r &= \mathcal{B}_r \left(1 + \frac{\cos a_d}{\cos a_e} \Omega_r \right) + \frac{x_e}{j_i} \theta_r, & \mathcal{O}_r &= \frac{\cos a_d \sin a_e}{\cos(a_i - i)} \frac{\mathcal{K}_r}{\mathcal{E}_r}, \\
 \nu_r &= \lambda_r \left(\mathcal{O}_r - \frac{x_e}{j_i} \sin a_g \right), & \omega_r &= \lambda_r \left(\mathcal{O}_r \cot a_e - \frac{x_e}{j_i} \cos a_g \right), \\
 \tau_r &= \mathcal{B}_r \tan a_e \left(1 + \frac{\sin a_d}{\sin a_e} \Omega_r \right) + \frac{y_e}{j_i} \theta_r, \\
 \zeta_r &= \lambda_r \left(\mathcal{O}_r \tan a_d - \frac{y_e}{j_i} \sin a_g \right), \\
 \xi_r &= \lambda_r \left(\mathcal{O}_r \cot a_e \tan a_d - \frac{y_e}{j_i} \cos a_g \right), \\
 \mathcal{L}^{r-1} &= \mathcal{V}^{r-1} \sin a_{r_g} - \mathcal{H}^{r-1} \cos a_{r_g}, & \mathcal{N}_r &= \mathcal{A}_r + \rho_r \mathcal{N}^{n-r'}, \\
 k_r &= \frac{\mathcal{A}_r + \mathcal{N}^{r-1}}{\omega_r \mathcal{N}_{r+1}}, & \mu_r &= 1 + k_r, & \mathcal{C}_r &= \frac{\lambda_r}{\pi_r} \frac{h}{g} \frac{l_{r-1}}{f^{n-r+1}}, \\
 \mathcal{U}_r &= \frac{\cos b \sin(q - m + n - p)}{\sin(q - m) \sin(p - n)}, \\
 \mathcal{J}_r &= \frac{l_{r-1}}{l_r} (\cos a_r + \pi_r \mathcal{U}_r \sin a_r) + \mathcal{C}_r \sin a_d, \\
 \mathcal{J}_r &= \frac{l_{r-1}}{l_r} (\sin a_r - \pi_r \mathcal{U}_r \cos a_r) - \mathcal{C}_r \cos a_d, \\
 \mathcal{S}_r &= \frac{\pi_r \Psi_r}{\rho_r \mathcal{K}_r} \left[1 + \frac{\cos(a_d - i)}{\cos(a_i - i)} \Phi_r \mathcal{K}_r \right],
 \end{aligned}$$

(A)
(suite)

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_r &= \frac{\Psi_r}{\sin(p-n)} \frac{\pi_r}{\rho_r} \frac{h}{g} \left[\frac{g}{f} \frac{l_e}{l_i} \cos(q+b) - \Omega_r \frac{\mathfrak{C}_r}{\mathfrak{E}_r} \frac{\sigma_e}{\sigma_d} \cos(n-b) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(p-b)}{\mathfrak{K}_r} + \Phi_r \cos(m+b) \right], \\ \mathfrak{C}_r &= \mathfrak{J}_r \mathbf{V}^{(n-r)'} + \mathfrak{J}_r \mathbf{H}^{(n-r)'} - \mathfrak{C}_r + \mathfrak{S}_r \mathfrak{C}_r, \quad \mathfrak{V}_r = \frac{l_r}{f_i} \frac{\lambda_r}{\pi_r}, \\ \mathfrak{G}_r &= \frac{l_r}{l_{r-1}} \cos a_{r-1} + \mathfrak{U}_r \sin a_{r-1} + \mathfrak{V}_r \sin a_g, \\ \mathfrak{H}_r &= \frac{l_r}{l_{r-1}} \sin a_{r-1} - \mathfrak{U}_r \cos a_{r-1} - \mathfrak{V}_r \cos a_g, \\ \mathfrak{I}_r &= \frac{1}{\cos a_e} \frac{\mathfrak{B}_r}{\pi_r} [\cos q + \Omega_r \cos m - \mathfrak{E}_r \cos p - \Phi_r \mathfrak{E}_r \cos n], \\ \mathfrak{M}_r &= \mathfrak{G}_r \mathbf{V}^{r-1} + \mathfrak{H}_r \mathbf{H}^{r-1} - \mathfrak{V}_r - \frac{\mathfrak{V}_r \theta_r}{\lambda_r}, \\ \Delta_r &= \frac{j_{n-r-1}}{tl_r} \left(\frac{\rho_{r+1}}{\pi_{r+1}} k_r \mathfrak{C}_{r+1} - \frac{\pi_r \mathfrak{M}_r}{\varpi_r} \right), \\ x_r &= \frac{1}{k_r(1 + \mathfrak{U}_{r+1})}, \quad \Sigma_r = 1 + \frac{\rho_r x_r}{\varpi_r}, \quad \Theta_r = \Delta_r x_r \frac{j_{r-1}}{j_{n-r-1}}.\end{aligned}$$

Dans ces expressions, toutes les lettres ω , a , l , σ , e , f , g , h , m , n , p , q , x , j et u , qui sont dépourvues d'indice relatif au panneau auquel elles se rapportent, doivent porter l'indice r du panneau r compté à partir de l'appui O de gauche.

Moyennant ces expressions (A), on peut tout d'abord écrire les équations de récurrence (B) qui relient les lignes d'influence auxiliaires des efforts normaux dans les montants surabondants, ceux-ci étant considérés comme montants d'extrémités des fermes *partielles* formées de tous les panneaux qui se trouvent, soit à gauche, soit à droite des montants successifs envisagés ⁽¹⁾.

(1) Rappelons que nous adoptons les compressions internes comme positives.

Pour les nœuds $(x, y)_{e,i}$ des montants $0, 1, \dots, r-1$,

$$(a) \quad \varpi_r V_x^r = \frac{x}{j_{r,i}} (\theta_r - \lambda_r L^{r-1}) - \pi_r V_x^{r-1}$$

et

$$(b) \quad \varpi_r H_y^r = \frac{y}{j_{r,i}} (\theta_r - \lambda_r L^{r-1}) - \pi_r H_y^{r-1}.$$

Pour le nœud r_i du montant r ,

$$(c) \quad \varpi_r V_{r_i}^r = \delta_r L^{r-1} - \beta_r - \pi_r V_{r-1}^{r-1}$$

et

$$(d) \quad H_{r_i}^r = -V_{r_i}^r \cot i$$

avec

$$(e) \quad H_{o_i}^o = V_{o_i}^o = 0.$$

Pour le nœud r_e du montant r ,

$$(f) \quad \varpi_r V_{r_e}^r = \varphi_r + \nu_r V^{r-1} - \omega_r H^{r-1} - \pi_r V_{r-1}^{r-1}$$

et

$$(g) \quad \varpi_r H_{r_e}^r = \tau_r + \zeta_r V^{r-1} - \xi_r H^{r-1} - \pi_r H_{r-1}^{r-1}$$

avec

$$(h) \quad H_{o_e}^o = -\cos \alpha_0 \quad \text{et} \quad V_{o_e}^o = +\sin \alpha_0.$$

Ensuite, on peut écrire les équations de récurrence (C) et (D) qui, une fois connues les lignes d'influence auxiliaires calculées à l'aide des équations de récurrence (B), permettent de déterminer les lignes d'influence définitives des montants surabondants, dans la ferme entière à n panneaux :

Pour les nœuds $(x, y)_{e,i}$ des montants $0, 1, \dots, r$ de la ferme partielle de gauche,

$$(C) \quad (a) \quad \mu_r Q_x^r = V_x^r - x \Delta_r$$

et

$$(b) \quad \mu_r R_y^r = H_y^r - y \Delta_r.$$

Pour les nœuds $(x', y')_{e,i}$ des montants $(n - r)', \dots, 2', 1', 0'$, de la ferme partielle de droite,

$$(D) \quad (a) \quad (\Sigma_r) Q_{x'}^{(n-r)'} = V_{x'}^{(n-r)'} - \underline{V_{n-r}^{(n-r)'}} + \kappa_r V_{r_i}^r + \Theta_r \left(x' - t \frac{v_{r_i}}{j_{r_i}} \sin i \right)$$

et

$$(b) \quad (\Sigma_r) R_{y'}^{(n-r)'} = H_{y'}^{(n-r)'} - \underline{H_{n-r}^{(n-r)'}} + \kappa_r H_{r_i}^r + \Theta_r \left(y' - t \frac{v_{r_i}}{j_{r_i}} \cos i \right).$$

Les indices e et i de x , y , x' et y' , qui interviennent dans les formules (B), (C) et (D), rappellent que les forces extérieures unitaires mobiles peuvent être appliquées aux nœuds de la membrure *extérieure* ou aux nœuds de la membrure *intérieure*.

III. — RÉSUMÉ DE LA PREMIÈRE PARTIE.

Nous avons vu plus haut, au paragraphe C, que les formules de récurrence (B) permettent de calculer directement et successivement les lignes d'influence particulières des montants $(1, 2, \dots, n - 1, n)$ dans l'hypothèse où ceux-ci sont les extrémités des fermes partielles successives formées des $(1, 2, \dots, n - 1, n)$ panneaux de la ferme entière, qui se trouvent à gauche de ces montants. Les relations (B, e et h) fournissent d'ailleurs des valeurs de départ à cette méthode par récurrence.

Les mêmes formules (B) permettent en outre de calculer directement et successivement les lignes d'influence particulières des montants $(1', 2', \dots, \overline{n - 1'}, n')$, dans l'hypothèse où ceux-ci sont les extrémités des fermes partielles successives à appui fixe à rotule en O' et formées des $(1, 2, \dots, n - 1, n)$ panneaux de la ferme entière, qui se trouvent à droite de ces monts.

Parmi ces lignes d'influence, celles des montants n et n' d'extrémités de la ferme entière, sont seules définitives. Les autres paraissent dépourvues de toute utilité. Il n'en est rien : elles servent *directement* au calcul des lignes d'influence définitives de tous les montants surabondants.

En effet, une fois ces lignes d'influence auxiliaires établies, les formules de récurrence (C) et (D) permettent d'obtenir d'emblée toutes les ordonnées des lignes d'influence définitives d'un montant intermédiaire quelconque r , dans l'hypothèse où celui-ci se trouve dans sa position véritable, c'est-à-dire lorsqu'il fait partie de l'arc entier à n panneaux, à appui fixe à rotule en O et à appui à rouleaux de dilatation en O'.

On voit que les lignes d'influence individuelles des fermes partielles, établies préalablement, ne sont pas inutiles. Au contraire, une légère correction les transforme directement en lignes d'influence définitives. Rien n'est perdu au cours des calculs.

Par conséquent, la méthode que nous venons d'exposer, tout en étant *rigoureuse*, présente plusieurs avantages :

a. Elle ne nécessite aucun calcul qui ne soit directement utilisable pour l'obtention des lignes d'influence ;

b. Elle donne des formules toutes résolues qui permettent le calcul direct des ordonnées des lignes d'influence ;

c. Elle sert, non pas à l'étude de la ferme sous l'effet d'une mise en charge fixe, mais à la détermination directe des lignes d'influence de tous les montants surabondants et, par suite, de toutes les autres barres ; elle permet donc une étude complète de la ferme ;

d. Elle est applicable à une ferme d'un nombre quelconque de panneaux, donc de degré d'hyperstaticité quelconque, et cela sans nécessiter de plus grandes difficultés que pour une ferme simple à nombre réduit de panneaux ;

e. Sa simplicité apparaît surtout lors de son application. Celle-ci ne nécessite aucune résolution algébrique. Elle se réduit simplement à des opérations qui toutes sont purement arithmétiques et qui se bornent à substituer à des symboles algébriques leurs valeurs numériques ;

f. Elle conduit à des erreurs relatives très faibles ;

g. Elle permet automatiquement des vérifications *au cours de son application*. C'est ce que l'on peut voir dans l'exemple numérique traité dans le chapitre suivant.

L'étude précédente se rapporte aux montants surabondants. Il reste à calculer les lignes d'influence des barres non surabondantes. C'est ce que nous allons faire dans la seconde partie de l'exposé.

Remarque. — Les symboles (A) se rapportent au cas le plus général des arcs à montants et croix de Saint-André. Les seuls qui interviennent dans les formules de récurrence (B), (C) et (D) sont $\varpi, \theta, \lambda, L, \pi, \delta, \beta, \varphi, \nu, \omega, \tau, \xi, \zeta, \mu, \Delta, \Sigma, \kappa, \Theta$. Nous avons augmenté ce nombre afin d'éviter toute répétition de calculs : nous avons mis sous forme de symboles tous les termes qui se présentent au moins deux fois au cours du calcul des symboles définitifs intervenant dans l'expression des formules de récurrence. Cette disposition paraît à première vue plus compliquée en raison de l'augmentation du nombre de symboles, mais en réalité, elle est d'application beaucoup plus simple, car elle réduit les opérations de calcul à leur strict minimum et ne nécessite plus que la substitution aux symboles algébriques de leurs valeurs numériques. Le travail est ainsi entièrement préparé jusque dans ses moindres détails. D'ailleurs, dans chaque cas particulier étudié, l'expression des symboles se simplifie si l'on tient compte des propriétés particulières de la figure géométrique de l'arc.

IV. — DEUXIÈME PARTIE.

Lignes d'influence des efforts principaux dans toutes les barres non surabondantes (membrures et diagonales).

Lorsque, par la méthode établie au cours de la *première partie* du présent chapitre, on a calculé les lignes d'influence des montants surabondants, on est ramené à l'étude d'un arc isostatique intérieurement, dont le treillis est constitué d'un montant d'extrémité et de

deux trains de diagonales formant ce que nous appellerons un *arc à losanges* (*fig. 6, c*). C'est d'ailleurs ce que nous avons déjà montré au début du présent chapitre (paragraphe *a* et figure 6, *a, b, c, d*). Les lignes d'influence qui restent à déterminer sont celles des membrures et des diagonales.

Leur calcul s'effectue, comme nous avons vu, en appliquant le principe de superposition : on décompose la mise en charge de la figure 6 (*b*) en deux autres, celle de la figure 6 (*c*) et celle de la figure 6 (*d*). La ligne d'influence de l'effort normal dans une barre quelconque *d* (membrure ou diagonale) est égale à la somme des lignes d'influence de l'effort normal dans cette même barre, dans l'hypothèse où celle-ci fait partie de l'*arc à losanges* sollicité par les mises en charge (*c*) et (*d*).

La ligne d'influence de la barre quelconque *d*, dans l'arc isostatique à losanges sollicité par la force unitaire mobile *P* (*fig. 6, c*), s'obtiendra en appliquant le principe des travaux virtuels (*voir* Chapitre I, 1^e). On déterminera utilement la déformée en traçant un diagramme de Williot. Nous avons montré que celui-ci est très simple dans le cas actuel : l'application du principe des travaux virtuels ne nécessite l'action d'aucune force aux lèvres de la barre *d* supposée coupée, en raison de la déformabilité de la ferme obtenue après cette coupure ; les barres ne subissent donc aucune déformation longitudinale, ce qui simplifie beaucoup le tracé de Williot.

Il reste ensuite à calculer la ligne d'influence de l'effort normal dans la barre quelconque *d*, dans l'arc (*d*) (*fig. 6*) isostatique à losanges, dans lequel on a appliqué, aux paires de lèvres des coupures des montants surabondants, les compressions internes *variables* égales aux ordonnées successives des lignes d'influence de ces montants, calculées à l'avance. Dans ce but, il suffira, au préalable, de solliciter l'arc isostatique à losanges (*fig. 6, d*) par deux forces unitaires opposées appliquées *successivement* aux paires de lèvres de chacun des montants 1, 2, ..., *n*, et de tracer, pour chacune de ces sollicitations séparées, une figure de Cremona. Il y aura donc *n* figures de Cremona, qui donneront les coefficients d'influence des efforts internes de chacun des montants, dans *toutes* les barres non surabondantes de l'arc. On remarquera d'ailleurs que la sollicitation des lèvres d'un montant quelconque, par deux forces égales et opposées, n'influence que les barres de l'arc qui sont à gauche de ce montant.

A droite de celui-ci, tous les efforts internes des barres sont nuls. Les coefficients d'influence ainsi obtenus serviront à la détermination des lignes d'influence de toutes les membrures et diagonales de l'arc (d) isostatique à losanges pour des forces extérieures P mobiles et unitaires. Il suffira, pour chacune des positions de la force extérieure mobile $P = 1$, de sommer les effets de tous les montants surabondants.

A noter que l'arc est souvent symétrique. Il suffit, dans ce cas, d'étudier la moitié des barres de celui-ci. On calculera les lignes d'influence des barres de la moitié de droite de l'arc. A cette fin, on tracera les figures de Cremona uniquement pour les sollicitations des montants de cette partie de l'arc et seulement dans l'étendue de celle-ci.

Une fois en possession des lignes d'influence des membrures et des diagonales dans les arcs isostatiques (c) et (d) à losanges, en les sommant, on obtiendra les lignes d'influence exactes des mêmes barres, dans l'arc réel à montants et croix de Saint-André.

Remarque. — 1. Si la ferme est hyperstatique extérieurement, on opérera encore comme nous l'avons exposé au début du présent chapitre. On déterminera tout d'abord les lignes d'influence des efforts normaux dans toutes les barres de la ferme rendue isostatique extérieurement par suppression des liaisons hyperstatiques extérieures. Une fois ces lignes d'influence connues, on déterminera aisément celles des liaisons extérieures surabondantes, en appliquant, soit le principe de réciprocité de Maxwell, soit tout autre procédé équivalent, le théorème de Castigliano par exemple. Si l'on applique le principe de Maxwell, la déformée de la ferme s'obtiendra aisément à l'aide d'un diagramme de Williot.

Lorsqu'on connaîtra les lignes d'influence des liaisons surabondantes, on aura soin d'affecter les lignes d'influence des efforts normaux dans toutes les barres de la ferme rendue isostatique extérieurement, des corrections qui résultent de l'influence des liaisons extérieures surabondantes sur ces efforts normaux. On obtiendra ainsi les lignes d'influence définitives de l'arc hyperstatique extérieurement.

2. Nous donnerons, dans le chapitre suivant, une application de la méthode que nous venons d'exposer.

V. — POUTRES DROITES EN TREILLIS ARTICULÉ
A MONTANTS ET CROIX DE SAINT-ANDRÉ.

Les formules (A), (B), (C), (D) ont été établies pour les fermes planes quelconques en treillis articulé à montants et croix de Saint-André. Elles se simplifient dans le cas particulier où les montants sont tous parallèles ($b_r = 0$) ou lorsqu'une des membrures est rectiligne ($a_i = \text{const.} = i$ ou $a_e = \text{const.}$).

Dans le cas des poutres droites du même type, la simplification est beaucoup plus grande (fig. 10). On aboutit d'ailleurs aux formules que nous avons établies directement pour les poutres droites dans un autre travail ⁽¹⁾. Ces dernières ne sont cependant pas complètes, car elles n'ont été calculées que pour des charges extérieures verticales. Au contraire, nous déduirons de la théorie générale des formules plus complètes résolvant séparément les cas des forces extérieures verticales et horizontales.

Pour cela, il suffit de faire, dans les formules générales (A), (B), (C), (D) (fig. 10) :

$$\begin{aligned} i = a_i = a_e = w_i = 0, \quad l_e = l_i = a, \quad l_r = a \tan \alpha, \quad l_d = l_g = \frac{a}{\cos \alpha}, \\ h = e = g = f, \quad a_d = 2\pi - a_g = \alpha, \quad m = n = \frac{\pi}{2} - \alpha, \\ a_r = p = q = \frac{\pi}{2}, \quad p - n = \alpha \quad \text{et} \quad k = 0. \end{aligned}$$

Supposons tous les panneaux d'égale largeur a et soit x le *numéro d'ordre* du montant au droit du nœud d'application de la force extérieure mobile $P = 1$, laquelle peut être verticale et positive vers le bas ou horizontale et positive vers la droite. Il suffira donc de remplacer, dans les formules générales, x et j_{r_i} respectivement par xa et ra .

Nous changerons encore les indices e en s (membrure supérieure) et nous introduirons les *nouvelles* notations ψ , χ , η , $\nu_{i,s}$, $\omega_{g,i}$ et β . Dès

⁽¹⁾ *Étude des poutres à losanges et théorie des lignes d'influence des poutres droites en treillis à montants et croix de Saint-André* (Annales des Ponts et Chaussées, novembre 1936, Paris.

lors, les expressions (A) deviennent, toutes transformations faites,

$$\begin{aligned}
 & \nu_{r_i, s} = \frac{\sigma_{r-1}}{\tan^3 \alpha \sigma_{r_i, s}}, \quad \omega_{r_g, d} = \frac{\sigma_{r-1}}{\sin^3 \alpha \sigma_{r_g, d}}, \quad \rho_r = \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_r}, \\
 & \theta_r = \nu_{r_i} + \omega_{r_g}, \quad \alpha_r = \nu_{r_s} + \nu_{r_i}, \quad \gamma_r = \omega_{r_g} + \omega_{r_d}, \\
 & \varepsilon_r = \alpha_r + \gamma_r + \rho_r, \quad \varpi_r = \varepsilon_r + N_{r-1}^{r-1}, \quad \psi_r = \nu_{r_s} - \nu_{r_i}, \\
 & \chi_r = \varepsilon_r - r \psi_r - \theta_r, \quad \beta_r = \frac{\theta_r + N_{r-1}^{r-1} + H^{r-1} \cot \alpha}{r}, \\
 & \eta_r = \frac{N_{r_s}^r}{N_{n-r}^{(n-r)'}}, \quad k_r = \eta_r - N_{r_s}^r, \quad \mu_r = 1 + k_r, \\
 & \Delta_r = \frac{n-r}{n} (H^r + \eta_r H^{(n-r)'}).
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

Les formules de récurrence (B) se réduisent aux équations (II) et (II') ci-dessous, où les notations V ont été changées en N. L'équation (II', c) a été déduite de l'équation (17'') à l'aide des expressions (13), (7), (2'), (2''), (5), (17) et en remarquant que l'on doit prendre λ^{r_i} en valeur absolue. En effet, le diagramme de Williot (*fig. 7, f*) a été tracé en tenant compte du sens des déformations longitudinales des barres. On obtient donc les équations de récurrence suivantes ⁽¹⁾ :

Pour le cas des forces verticales mobiles et unitaires :

$$\begin{aligned}
 & \text{Pour } x_{i \text{ ou } s} = 0, 1, 2, \dots, r-1 \text{ et } 1 \leq r \leq n, \\
 & (a) \quad \varpi_r N_{x_{i \text{ ou } s}}^r = x \beta_r - N_{x_{i \text{ ou } s}}^{r-1}. \\
 & \text{Pour } x_i \equiv r_i, \\
 & (b) \quad N_{r_i}^r = 0. \\
 & \text{Pour } x_e \equiv r_e, \\
 & (c) \quad N_{r_s}^r = 1 - \frac{\rho_r}{\varpi_r},
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

(1) Rappelons que nous avons adopté les compressions internes comme positives.

et pour le cas des forces horizontales mobiles et unitaires :

$$\begin{aligned}
 & \text{Pour } x_{i \text{ ou } s} = 0, 1, 2, \dots, r-1 \text{ et } 1 \leq r \leq n, \\
 (a) \quad & \varpi_r H_{x_s}^r = \beta_r \tan \alpha - H_{x_s}^{r-1}, \\
 (b) \quad & \varpi_r H_{x_i}^r = -H_{x_i}^{r-1}. \\
 (II') \quad & \text{Pour } x_i \equiv r_i, \\
 (c) \quad & \varpi_r H_{r_i}^r = \nu_{r_i} \tan \alpha - H_{r-1_i}^{r-1}. \\
 & \text{Pour } x_s \equiv r_s, \\
 (d) \quad & \varpi_r H_{r_s}^r = (\beta_r + \nu_{r_s}) \tan \alpha - H_{r-1_s}^{r-1}.
 \end{aligned}$$

En combinant les formules (II', c et d), on trouve l'équation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
 (III) \quad & r H^r \cot \alpha = 1 - \frac{\chi_r + (r-1) H^{r-1} \cot \alpha}{\varpi_r}, \\
 & \text{ou} \\
 & M^r = 1 - \frac{\chi_r + M^{r-1}}{\varpi_r} \quad \text{pour } r H^r \cot \alpha = M^r,
 \end{aligned}$$

qui est plus aisée à appliquer et peut remplacer avantageusement l'équation II' (d). On a, en outre, $H^0 = 0$ et $N_{1_s}^1 = 1$ comme valeurs de départ de l'application des formules (II, c), (III) et, par suite, de toutes les formules de récurrence (II) et (II').

De même, les formules générales de récurrence (C) se simplifient et s'écrivent finalement, pour le cas des forces verticales mobiles et unitaires,

$$\begin{aligned}
 (IV) \quad & \text{Pour } x_{i \text{ ou } s} = 0, 1, \dots, r \text{ et } 1 \leq r \leq n-1, \\
 & \mu_r Q_{x_{i \text{ ou } s}}^r = N_{x_{i \text{ ou } s}}^r - \frac{x}{\tan \alpha} \Delta_r,
 \end{aligned}$$

et, pour le cas des forces horizontales mobiles et unitaires,

$$(IV') \quad \begin{array}{c} \text{Pour } x_{i \text{ ou } s} = 0, 1, 2, \dots, r \text{ et } 1 \leq r \leq n-1, \\ \mu_r R_{x_s}^r = H_{x_s}^r - \Delta_r \quad \text{et} \quad \mu_r R_{x_i}^r = H_{x_i}^r. \end{array}$$

La première équation générale (D) peut être supprimée dans le cas des poutres droites et être remplacée par l'équation (IV) ci-dessus, que l'on appliquera aux tronçons de droite en comptant tous les éléments du calcul à partir de l'extrémité de droite de la poutre.

Quant à la seconde équation générale (D), relative aux forces extérieures horizontales, elle devient dans le cas des poutres droites,

$$(V) \quad \begin{array}{c} \text{Pour } x'_{i \text{ ou } s} = 0, 1, 2, \dots, n-r \text{ et } 1 \leq n-r \leq n : \\ (a) \quad \mu_r R_{x'_i}^{n-r'} = \eta_r \left(H_{x'_i}^{n-r'} - H_{\frac{n-r'}{n-r}}^{n-r'} \right) + H_{r_i}^r, \\ (b) \quad \mu_r R_{x'_s}^{n-r'} = \eta_r \left(H_{x'_s}^{n-r'} - H_{\frac{n-r'}{n-r}}^{n-r'} \right) + H_{r_i}^r + \frac{r}{n-r} \Delta_r. \end{array}$$

Remarque. — Dans l'expression de Δ_r , $H_{\frac{n-r'}{n-r}}^{n-r'}$ a été obtenu en appliquant la formule de récurrence (III) aux tronçons de droite de la poutre supposés retournés bout pour bout. Le signe de $H_{\frac{n-r'}{n-r}}^{n-r'}$ donné par les formules (A), dans Δ_r , a donc été changé.

VI. — DISCUSSION DE LA MÉTHODE.

On a établi, pour le montant r , les formules de récurrence (B), (C), (D) et, par suite, les formules (II) à (V), sans faire aucune hypothèse sur la nature de la ferme à $(r-1)$ panneaux. Il suffit seulement qu'il y ait un montant $(r-1)$ et que le panneau r soit à croix de Saint-André. On peut donc les appliquer aux systèmes qui ne possèdent des montants et croix de Saint-André que dans une région seulement et qui, en dehors de cette région, sont formés de tronçons de type quelconque (Pratt, Howe, Warren ou Warren double) (*fig.* 11 et 12). Ces systèmes sont d'ailleurs les plus fréquemment employés dans la pratique, surtout sous forme de poutres

droites. En effet, c'est seulement dans les panneaux centraux que l'effort tranchant peut changer de signe. Pour plus de clarté, nous étudierons un cas particulier : celui de la poutre droite de la figure 11 (*a*) qui présente, en dehors de la région centrale à montants et croix de Saint-André, des tronçons en treillis du type Warren double que nous avons appelé à *losanges*. Nous considérerons seulement le cas des charges extérieures verticales. Le procédé suivant de résolution serait applicable en tous points aux fermes quelconques autres que les poutres droites, mais du même type.

On peut traiter la poutre (*fig.* 11, *a*) comme suit :

a. Calculer les lignes d'influence partielles des montants surabondants $(r-1)$ à k considérés comme montants d'extrémité des deux tronçons qu'ils découpent dans la poutre entière à n panneaux, ou seulement du tronçon de gauche dans le cas d'une poutre symétrique. A cette fin, on appliquera les formules de récurrence (II) et (III). On calculera tout d'abord la ligne d'influence du montant r . Celle-ci s'exprime en fonction de celle du montant $(r-1)$ [formule (II)], ce qui nécessite la connaissance préalable de cette dernière. Or, au cours de l'exposé de la méthode, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la manière dont elle aurait été obtenue ou sur la configuration de la ferme à gauche du montant $(r-1)$.

Dans le cas actuel, la poutre formée des $(r-1)$ panneaux de gauche est une poutre à losanges possédant un montant à chaque extrémité. Cette poutre est hyperstatique du premier degré. On pourra calculer d'une manière quelconque la ligne d'influence de l'effort normal dans le montant $(r-1)$ d'extrémité de droite. On appliquera par exemple le principe de Maxwell en coupant ce montant, dans la poutre non sollicitée, en appliquant aux lèvres de la coupure des tractions unitaires, en déterminant la déformée qui en résulte à l'aide d'un tracé de Williot et en mesurant la projection de cette déformée sur la direction des forces extérieures éventuelles, à l'échelle du rapprochement des lèvres du montant coupé.

Connaissant cette ligne d'influence partielle du montant $(r-1)$, on pourra ensuite de proche en proche, à l'aide des formules de récurrence (II) et (III), déterminer celles des montants $(r, r+1, \dots, k)$.

b. Calculer les lignes d'influence des mêmes montants considérés, cette fois, comme montants intermédiaires faisant partie de la poutre

entière à n panneaux. Il suffira d'appliquer la formule (IV) ci-dessus, dans laquelle $N_{x_i \text{ ou } s}^r$ représente encore la ligne d'influence particulière du montant r considéré comme montant d'extrémité du tronçon de la poutre qui se trouve à sa gauche. Cette ligne d'influence particulière a été calculée au préalable ainsi que nous venons de le voir dans l'alinéa (a) précédent. La branche de la ligne d'influence définitive du montant r , qui correspond à la partie de la poutre située à droite de celui-ci, se calculera à l'aide de la même formule (IV), mais en supposant le tronçon de droite retourné. Nous désignerons par la notation Q_x^j les lignes d'influence des montants surabondants intermédiaires.

c. Il reste à calculer la ligne d'influence du dernier montant surabondant, c'est-à-dire du montant n d'extrémité de droite de la poutre. On peut encore l'obtenir en appliquant le principe de superposition (fig. 11, b et c). La poutre (b) est une poutre à losanges hyperstatique du premier degré. La ligne d'influence du montant n s'obtiendra en appliquant le principe de Maxwell. Nous la désignerons par la notation $N_x^{m.d.}$.

La poutre (c) n'est autre que la poutre (b) soumise à une sollicitation particulière, variable avec x , au droit des montants ($r - 1$) à k supprimés. On pourra donc utiliser la même ligne d'influence $N_x^{m.d.}$ pour déterminer l'influence, dans le montant n , des paires de forces Q_{x-1}^{r-1} , Q_x^r , ..., Q_x^k , variables avec x .

La ligne d'influence exacte du montant n , dans la poutre (a) est égale à la somme des lignes d'influence trouvées pour le montant dans les deux poutres (c) et (d). Elle a donc pour expression :

$$(40) \quad N_x^n = N_x^{m.d.} + \sum_{j=r-1}^{j=k} Q_x^j (N_{j_i}^{m.d.} - N_{j_s}^{m.d.}),$$

puisque nous comptons les forces extérieures verticales positives vers le bas.

d. Dès que l'on connaît les lignes d'influence des montants surabondants, on est ramené à l'étude d'une poutre isostatique intérieurement. Les lignes d'influence des efforts normaux dans les membrures et les diagonales se détermineront encore par superposition en décomposant la mise en charge (fig. 11, a) de la poutre en deux autres

analogues aux mises en charge (*b*) et (*c*). La seule différence est que l'on coupera en plus le montant surabondant *n* et que, dans la poutre (*c*), on appliquera aux lèvres de cette coupure les compressions internes N_x^u variables avec *x*. Cette décomposition est d'ailleurs identique à celle que nous avons exposée au début du présent chapitre dans l'étude des fermes à montants et croix de Saint-André.

Quant aux poutres qui, en dehors de la région centrale à montants et croix de Saint-André, sont formées de panneaux du type N (*fig.* 12) ou du type Warren simple, on emploiera la même méthode que celle utilisée ci-dessus aux alinéas *a*, *b* et *d*. On appliquera encore les formules (II), (III) et (IV) à la détermination des lignes d'influence des montants surabondants (*r* — 1, *r*, . . . , *k* — 1). Le montant *k* n'est plus surabondant; le montant *n* non plus. On sera ramené encore une fois à l'étude d'une poutre isostatique.



CHAPITRE III.

APPLICATION DES FORMULES DU CHAPITRE PRÉCÉDENT AU CALCUL RIGOUREUX DES LIGNES D'INFLUENCE D'UN ARC BIARTICULÉ A MONTANTS ET CROIX DE SAINT-ANDRÉ.

I. — GÉNÉRALITÉS ET CALCUL DES DIMENSIONS DE L'ARC.

Afin de préciser davantage la marche à suivre dans l'utilisation de la méthode que nous venons d'exposer au chapitre précédent, nous l'appliquerons à un arc particulier à montants et croix de Saint-André. Nous calculerons, à l'aide des expressions (A) et des formules de récurrence (B), (C) et (D), les lignes d'influence rigoureuses des efforts normaux dans les différentes barres de cet arc.

Celui-ci est appuyé sur deux rotules de niveau. Il possède donc, en plus de son hyperstaticité intérieure, une hyperstaticité extérieure du premier degré. Il est, en outre, formé de huit panneaux et est donc hyperstatique intérieurement du huitième degré.

D'autre part, il est constitué comme suit : les nœuds de la membrure inférieure sont situés sur un arc de cercle, d'ouverture totale de 120° entre les rotules d'appuis, placées aux nœuds d'extrémités de la membrure intérieure; la portée de l'arc est de 40^m ; les nœuds de la membrure extérieure sont de même situés sur un arc de cercle de même rayon et de même ouverture que le précédent, mais qui a subi une translation verticale égale à 4^m ; enfin, les montants sont verticaux et les largeurs des panneaux sont telles qu'elles interceptent des angles au centre égaux. Ceux-ci sont donc égaux à 15° . De ces propriétés, on peut déduire toutes les dimensions géométriques de l'arc qui nous serviront dans le calcul des lignes d'influence : abscisses x et ordonnées y des différents nœuds de la membrure intérieure (indice i) et de la membrure extérieure (indice e), largeur horizontale c des panneaux ($c_r = x_r - x_{r-1}$, si r est le numéro d'ordre du panneau en question), dénivellation d de deux nœuds successifs ($d_r = y_{r_i} - y_{\underline{r-1}_i} = y_{r_e} - y_{\underline{r-1}_e}$) de la membrure intérieure

TABLEAU I. — Dimensions et rapports des dimensions de l'arc.

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$x_r m. \dots$	0	3,670.068	8,452.995	14,022.821	20,000.000	25,977.179	31,547.005	36,329.932	40,000.000	
$y_r \dots$	0	4,782.927	8,452.994	10,760.095	11,547.005	10,700.095	8,452.994	4,782.927	0	
$y_r e \dots$	4	8,782.927	12,452.994	14,760.095	15,547.005	14,560.095	12,452.994	8,782.927	4,000.000	
$c_r \dots$		3,670.068	4,782.927	5,569.826	5,977.179	5,977.179	5,569.826	4,782.927	3,670.069	
$d_r \dots$		4,782.927	3,670.068	2,307.101	0,786.910	-0,786.910	-2,307.101	-3,670.068	-4,782.927	
$l_{r_g} \dots$		9,518.887	9,039.155	8,414.428	7,657.746	6,786.052	5,821.424	4,794.293	3,752.649	l_{r_g}
$y_{r_i} \dots$		1,303.225	1	0,767.327	0,577.351	0,414.213	0,267.949	0,131.653	0	
$x_r \dots$		2,393.123	1,473.205	1,052.576	0,777.351	0,568.194	0,394.744	0,241.755	0,100.000	
$\left(\frac{d}{c}\right)_r \dots$		1,303.225	0,767.327	0,414.213	0,131.653	-0,131.653	-0,414.213	-0,767.327	-1,303.225	
$\frac{c_r}{l} \dots$		0,917.517	1,195.731	1,392.456	1,494.295	1,494.295	1,392.456	1,195.731	0,917.517	
$\frac{d_r}{l} \dots$		1,195.731	0,917.517	0,576.775	0,196.727	-0,196.727	-0,576.775	-0,917.517	-1,195.731	
$\frac{l_{r_a}}{l} \dots$		2,379.722	2,250.789	2,103.607	1,914.436	1,696.513	1,455.356	1,198.573	0,938.162	$\frac{l_{r_g}}{l}$
$\frac{l + d_r}{c_r} \dots$		2,393.124	1,603.635	1,132.369	0,800.864	0,537.560	0,303.941	0,068.981	-0,213.328	$\frac{l - d_r}{c_r}$
	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$= r$

ou de la membrure extérieure, longueurs des barres. Ces dimensions sont consignées dans les premières lignes du tableau I ci-dessous. On a $x_{r_i} = x_{r_e}$, que nous désignerons par x_r . Le rayon des arcs de cercle des membrures et la flèche de la membrure intérieure sont égaux respectivement à

$$\rho = 23^{\text{m}},094.010 \quad \text{et} \quad f = 13^{\text{m}},547.005.$$

Les montants sont tous de longueur égale à 4^{m} , que nous désignerons par l . Les barres des deux membrures d'un même panneau sont parallèles. En outre, elles sont, toutes deux et dans tous les panneaux, de même longueur, égale à $l_i = 6^{\text{m}},028.747$. Enfin, les abscisses et ordonnées des nœuds de la membrure intérieure et de la membrure extérieure sont données, en mètres, par les formules

$$x_r = 20 \left(1 - \frac{2 \sin \theta}{\sqrt{3}} \right), \quad y_{r_i} = \frac{20}{\sqrt{3}} (2 \cos \theta - 1), \quad y_{r_e} = y_{r_i} + 4,$$

où θ est l'angle intercepté par le rayon du nœud de la membrure intérieure et la verticale médiane de l'arc. Cet angle est mesuré positivement vers la gauche.

Des dimensions de l'arc, on peut déduire les rapports $y_{r_i}:x_r$, $y_{r_e}:x_r$, $(d:c)_r$, $c_r:l$, $d_r:l$, $l_{r_i}:l$, $l_{r_e}:l$ et $(l+d_r):c_r$, qui nous seront utiles dans la suite du calcul. l est la longueur commune de tous les montants. Les valeurs de $(l+d_r):c_r$ sont symétriques de celles du rapport $(l-d_r):c_r$, car les valeurs de c sont symétriques, tandis que celles de d sont antisymétriques par rapport à l'axe vertical médian de l'arc (Tableau I).

II. — PRÉDÉTERMINATION DES SECTIONS.

La suite du calcul rigoureux des lignes d'influence nécessite la connaissance des sections transversales des barres.

En vue de prédéterminer celles-ci d'une manière simplifiée, on a tracé les lignes d'influence approximatives des barres d'une des moitiés de l'arc dans l'hypothèse courante, seulement pour les poutres droites, où la ferme de la figure 13 (a) peut être considérée comme système multiple décomposable en deux fermes isostatiques intérieurement (*fig.* 13, *b* et *c*). Ces fermes restent, par contre, toutes deux hyperstatiques extérieurement du premier degré. Elles sont constituées chacune par les membrures, les montants et les

diagonales inclinées d'un même côté dans la ferme étudiée (*fig. 13, a*), ces barres étant prises avec leur section entière. *D'autre part, les deux fermes composantes (fig. 13, b et c) sont supposées sollicitées par la moitié des charges extérieures qui sollicitent la ferme réelle.* La décomposition précédente de l'arc étudié en deux fermes plus simples n'est en général pas rigoureuse. Elle le serait, si sous l'effet des demi-charges qui les sollicitent, ces dernières se déformaient identiquement.

Le cas des charges extérieures verticales est déterminant pour le dimensionnement des sections des barres. Nous n'avons, par conséquent, tracé les lignes d'influence *approchées* que dans cette hypothèse. Nous avons supposé, en outre, que les charges sont appliquées à la membrure supérieure.

La ligne d'influence approchée d'une des barres des membrures est égale à la *somme* des lignes d'influence approchées de la même barre, dans les deux fermes composantes (*fig. 13, b et c*). Il en est de même de celles des montants. Quant à celles des diagonales, elles sont seulement égales aux lignes d'influence des mêmes barres dans la ferme composante (*b* ou *c*) qui les contient.

Les deux fermes composantes, quoique beaucoup plus simples que la ferme réelle à montants et croix de Saint-André, restent malgré tout hyperstatiques extérieurement du premier degré. On a choisi la poussée q comme inconnue hyperstatique extérieure des deux arcs, et l'on a déterminé sa ligne d'influence. Celle-ci dépend encore des sections transversales des barres. Or, on ne connaît pas ces dernières. C'est pour cette raison que l'on a tracé une ligne d'influence *approximative* de la poussée q en utilisant les tables établies par Bresse pour les arcs biarticulés à fibre moyenne circulaire, à appuis de niveau et à section constante ⁽¹⁾. Les tables de Bresse ont été établies pour le cas des arcs à âme pleine, mais on peut les étendre, sans commettre de trop grandes erreurs, au cas des arcs en treillis, à condition d'assimiler ceux-ci à des arcs à âme pleine de section et de moment d'inertie équivalents.

Une fois connue la ligne d'influence approchée de l'élément hyperstatique q , on peut déterminer les lignes d'influence de pre-

⁽¹⁾ BRESSE, *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes, accompagnées de tables numériques*, Paris, 1854.

mière approximation des efforts normaux dans les montants, les membrures et les diagonales.

Nous n'entrerons pas dans le détail du calcul des lignes d'influence, ni dans celui des sections transversales des barres. Nous nous bornerons à donner les résultats de ce calcul. Les valeurs trouvées pour les sections transversales σ_r et $\sigma_{r_{b,e,g,d}}$ sont données dans le Tableau II et sont exprimées en mètres carrés.

III. — CALCUL DES LIGNES D'INFLUENCE EXACTES.

Nous supposons que les charges extérieures sont appliquées aux nœuds de la membrure extérieure. Nous traiterons le cas où les forces extérieures mobiles sont verticales et celui où elles sont horizontales. Ainsi que nous l'avons vu, l'arc est non seulement hyperstatique intérieurement, mais il est en plus une fois hyperstatique extérieurement. Comme pour le calcul de prédétermination des sections, nous choisirons encore comme inconnue hyperstatique extérieure la poussée q .

Cela étant, nous continuerons à supposer que les sollicitations restent dans les limites de validité de la loi de Hooke. On pourra donc appliquer le principe de superposition comme suit à la recherche des lignes d'influence définitives des efforts principaux dans toutes les barres de l'arc biarticulé.

Soit b une quelconque de ces barres (*fig. 14, a*). Ses lignes d'influence définitives, pour le cas des charges verticales comme pour celui des forces horizontales, dans l'arc biarticulé de la figure 14 (*a*), sont égales aux lignes d'influence de la même barre b dans l'arc de la figure 14 (*b*), dans lequel on a substitué à la rotule de droite la poussée $q_{(x,v)}$ développée par cette liaison. Cette poussée $q_{(x,v)}$ est variable avec la position de la force extérieure unitaire mobile. On peut ensuite décomposer la mise en charge de l'arc (*fig. 14, b*) en deux autres : celles des figures 14 (*c* et *d*). Dans la figure (*c*), on a remplacé les montants par leurs actions F sur leurs nœuds d'extrémités, ces actions étant variables avec la position de la force extérieure mobile qui les développe. De même, on peut décomposer la mise en charge de la ferme (*fig. 14, c*) en deux autres : celles des figures 14 (*e* et *f*). On voit donc que, finalement, les lignes d'influence *définitives* des efforts principaux dans une barre quel-

conque b de l'arc biarticulé étudié (*fig.* 14, a) sont égales à la somme des lignes d'influence obtenues pour la même barre dans les cas de sollicitation représentés par les figures (d , e et f) de l'arc rendu isostatique extérieurement par suppression de la rotule de droite et introduction de la poussée variable $q_{(x,y)}$.

Les fermes (*fig.* 14, e et f) présentent les caractéristiques suivantes : la ferme (e) est isostatique intérieurement, car les montants surabondants 1 à 8 sont supprimés. Nous pourrions donc déterminer les lignes d'influence d'une barre quelconque b en appliquant le principe des travaux virtuels comme il a été exposé dans le Chapitre I. Nous y reviendrons d'ailleurs dans la suite, au cours du présent chapitre. Quant à l'arc de la figure 14 (f), il est le même que le précédent, sauf qu'il est sollicité en tous les nœuds par les efforts internes F , variables avec x et y , développés dans les montants 1 à 8 par la force extérieure unitaire mobile. Ces efforts F tiennent lieu de l'influence des montants surabondants, qui ont été supprimés. Si l'on a au préalable tracé les lignes d'influence de toutes les barres dans l'arc isostatique (e), pour les cas où les charges extérieures sont verticales et appliquées aux nœuds de la membrure intérieure et à ceux de la membrure extérieure, les lignes d'influence de la barre b dues aux efforts F s'obtiendront directement à l'aide des précédentes. On verra plus loin qu'elles peuvent s'obtenir de deux autres façons, soit à l'aide de tracés de Cremona, soit par une méthode analytique très simple. Il est à remarquer que l'effort dans la barre b n'est fonction que des efforts F dans les montants situés à droite de b . Comme, du fait de la symétrie de l'arc étudié (*fig.* 14, a), il suffit de calculer les lignes d'influence des barres de la moitié de droite de la ferme, on n'aura à effectuer les tracés de Cremona que jusqu'au montant médian (montant 4). Si l'on a calculé au préalable les lignes d'influence de la poussée $q_{(x,y)}$, pour des forces verticales et pour des forces horizontales, on pourra déterminer celles de la barre *quelconque* b dues à la sollicitation de la figure (d).

De ce qui précède, il résulte que nous pouvons échelonner comme suit le calcul des lignes d'influence définitives des barres de l'arc biarticulé (*fig.* 14, a).

1. *Calcul des lignes d'influence des montants surabondants 1 à 8 pour des forces verticales et pour des forces horizontales, dans*

l'arc rendu isostatique extérieurement par introduction, à l'extrémité de droite, d'un appui à rouleau de dilatation mobile sur un plan horizontal. On appliquera à cette fin les expressions (A) et les formules de récurrence (B), (C) et (D) du deuxième chapitre.

2. *Calcul des lignes d'influence exactes de la poussée $q_{(x,y)}$* , pour des forces verticales et horizontales.

3. *Calcul des lignes d'influence des barres des membrures et des diagonales* dans l'arc rendu isostatique intérieurement et extérieurement (fig. 14, e).

4. *Calcul des corrections de ces dernières lignes d'influence dues à la mise en charge, variable avec x et y , de la figure 14 (f).*

5. *Calcul des corrections de ces mêmes lignes d'influence dues à la mise en charge de la figure 14 (d).*

En sommant algébriquement les lignes d'influence calculées en 3, 4 et 5, on obtient les lignes d'influence définitives cherchées pour l'arc biarticulé.

1. **Lignes d'influence exactes des montants surabondants, dans l'arc rendu isostatique extérieurement.** — Nous ferons tout d'abord le calcul exact des lignes d'influence des montants surabondants considérés comme appartenant à l'arc rendu isostatique extérieurement par suppression de la rotule de droite et substitution à celle-ci d'un appui simple à rouleaux de dilatation mobiles sur un plan horizontal passant par la rotule de gauche,

Rappelons que nous nous bornons à l'étude des efforts principaux, c'est-à-dire que nous supposons que les attaches sont articulées. En outre, nous continuons à adopter les compressions internes des barres comme positives.

La présente partie du calcul exact constitue la résolution proprement dite de l'hyperstaticité *intérieure* du système. La marche à suivre de la méthode démontrée au deuxième chapitre a été exposée à la fin de la première partie de ce même chapitre. Elle consiste à faire usage des expressions (A) et des formules de récurrence toutes résolues (B), (C) et (D).

Les symboles (A) se simplifient du fait des propriétés particulières suivantes de l'arc étudié. Nous avons vu que tous les panneaux forment des parallélogrammes : les montants sont tous verticaux et

les membrures d'un même panneau sont parallèles (*fig. 15*). On a donc

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} a_{r_i} = a_{r^s}, \quad a_r = \frac{\pi}{2}, \quad \sin a_r = 1, \quad \cos a_r = 0, \quad l_r = \text{const.} = 4m = l, \\ g_r = e_r = \frac{l_{r_e}}{2}, \quad h_r = f_r = \frac{l_{r_d}}{2}, \quad l_{r_e} = l_{r_i} = \text{const.} = 6^m, 028.747 \frac{\pi}{2} = l_i, \\ p_r + q_r = \pi, \quad b_r = 0, \quad m_r = \frac{\pi}{2} - a_{r_d}, \quad n_r = a_{r_g} - \frac{3\pi}{2}, \\ q_r = \frac{\pi}{2} = a_{r_i}, \quad p_r = \frac{\pi}{2} + a_{r_i}. \end{array} \right.$$

On peut encore écrire :

Si $c_r = x_r - x_{r-1}$ et $d_r = y_{r_e} - y_{r-1_e} = y_{r_i} - y_{r-1_i}$

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} c_r = l_{r_d} \cos a_{r_d} = l_{r_g} \cos a_{r_g} = l_{r_i} \cos a_{r_i}, \quad \sin a_{r_i} = \frac{d_r}{l_i}, \\ \sin a_{r_d} = \frac{l + d_r}{l_{r_d}}, \quad \sin a_{r_g} = \frac{d_r - l}{l_{r_g}}, \quad \tan a_{r_d} = \frac{l + d_r}{c_r}, \\ \tan a_{r_g} = \frac{d_r - l}{c_r}, \quad \tan a_{r_i} = \frac{d_r}{c_r}, \quad i = 0, \quad n = 8, \\ j_{r_i} = x_{r_i} = x_{r_e} = x_r, \quad y_{r_i} = y_{r_i}, \quad y_{r_e} = y_{r_e}, \quad x'_r = x_r, \quad y'_r = y_r. \end{array} \right.$$

Les deux dernières relations $x'_r = x_r$ et $y'_r = y_r$ découlent de la symétrie de l'arc.

En outre, le plan d'appui de droite du tronçon quelconque partiel de gauche à r panneaux est horizontal. On a donc, en général,

$$V_{r_i} = 0.$$

Enfin, l'arc forme une figure géométrique symétrique par rapport à l'axe vertical médian. De plus, les barres symétriquement disposées ont des sections transversales égales. Il en résulte que :

$$(43) \quad \underline{V^{n-r}} = \underline{V^{n-r}} \quad \text{et} \quad \underline{H^{n-r}} = -\underline{H^{n-r}}.$$

Rappelons que les éléments affectés de l'exposant (¹) se rapportent au tronçon à $(n - r)$ panneaux formé des panneaux de l'arc qui se trouvent à droite du montant r considéré, ce tronçon étant supposé à appui fixe à rotule au nœud d'extrémité 8_i (*fig. 14, a*). D'autre part, rappelons que la force extérieure unitaire mobile est mesurée positivement vers le bas lorsqu'elle est verticale, et vers la droite lorsqu'elle est horizontale.

Moyennant les propriétés précédentes, les expressions (A) s'écrivent :

(44)

$$\begin{aligned}
 \pi_r &= 1, \quad \lambda_r = \frac{l_g}{l}, \quad \Psi_r = \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_g} \frac{l_g^2}{l^2}, \quad \Phi_r = \frac{\sigma_g}{\sigma_l} \frac{l_l^2}{l_g^2}, \quad \Omega_r = \frac{\sigma_d}{\sigma_e} \frac{l_l^2}{l_d^2}, \\
 \Lambda_r &= \mathcal{E}_r = \frac{\sigma_d}{\sigma_g} \frac{l_g^3}{l_d^3}, \quad \mathcal{K}_r = \Lambda_r \frac{l_d}{l_g}, \quad \theta_r = \frac{\sigma_{r-1}}{l^3} \left(\frac{l_g^3}{\sigma_g} + \frac{l_l^3}{\sigma_l} \right), \\
 \rho_r &= \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_r}, \quad \alpha_r = \frac{\sigma_{r-1}}{l^3} l_l^3 \left(\frac{1}{\sigma_l} + \frac{1}{\sigma_e} \right), \quad \gamma_r = \frac{\sigma_{r-1}}{l^3} \left(\frac{l_g^3}{\sigma_g} + \frac{l_d^3}{\sigma_d} \right), \\
 \mathcal{A}_r &= \varphi_r = \alpha_r + \gamma_r, \quad \varepsilon_r = \varphi_r + \rho_r, \quad H_r = H_{r,e} - H_{r,i}, \quad V_r = N_r = V_{r,e}, \\
 \varpi_r &= \varepsilon_r + V_{r-1}^{r-1}, \quad \delta_r = \beta_r = 0, \quad \mathcal{B}_r = \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_d} \left(\frac{l_d}{l} \right)^3, \quad \nu_r = 1, \\
 \omega_r &= 0, \quad \tau_r = \frac{d}{c} \frac{\sigma_{r-1}}{l^3} \left(\frac{l_d^3}{\sigma_d} + \frac{l_l^3}{\sigma_e} \right) + \frac{l}{c} \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_e} \frac{l_l^3}{l^3} + \frac{y_e}{x_r} \theta_r, \\
 \xi_r &= 1 + \frac{d}{l} - \frac{c}{l} \frac{y_e}{x_r}, \quad \zeta_r = \frac{d}{l} \frac{l+d}{c} + \frac{l-d}{l} \frac{y_e}{x_r}, \\
 L^{r-1} &= \left(\frac{d-l}{l_g} \right)_r V_{r-1}^{r-1} - \left(\frac{c}{l_g} \right)_r H^{r-1}, \quad \mathcal{U}_r = \varphi_r + \rho_r V_{n-r}^{n-r}, \\
 k_r &= \frac{\varphi_r + V_{r-1}^{r-1}}{\varpi_r \mathcal{U}_{r+1}}, \quad \mu_r = 1 + k_r, \quad \mathcal{J}_r = -2 \frac{d}{c} + \frac{l+d}{x_{n-r+1}}, \\
 \mathcal{I}_r &= \frac{x_{n-r}}{x_{n-r+1}}, \quad \rho_r \mathfrak{E}_r = \frac{d}{c} \varphi_r + \frac{l}{c} \sigma_{r-1} \frac{l_l^3}{l^3} \left(\frac{1}{\sigma_l} - \frac{1}{\sigma_e} \right), \\
 \mathcal{S}_r \mathcal{C}_r &= \frac{1}{\varphi_r x_{n-r+1}} \frac{\sigma_{r-1}}{l^2} \left(\frac{l_d^3}{\sigma_d} + \frac{l_l^3}{\sigma_l} \right), \\
 \mathcal{L}_r &= \mathcal{J}_r V_{n-r}^{n-r} - \mathcal{J}_r H_{n-r}^{n-r} - \mathfrak{E}_r + \mathcal{S}_r \mathcal{C}_r, \quad \mathcal{V}_r = \frac{l_g}{x_r}, \\
 \mathcal{G}_r &= -2 \frac{d}{c} + \frac{d-l}{x_r}, \quad \mathcal{H}_r = \frac{x_{r-1}}{x_r}, \quad \mathcal{V}_r = 2 \frac{d}{c} \varphi_r - \rho_r \mathfrak{E}_r, \\
 \mathcal{M}_r &= \mathcal{G}_r V_{r-1}^{r-1} + \mathcal{H}_r H^{r-1} - \mathcal{V}_r - \frac{l}{x_r} \theta_r, \\
 \Delta_r &= \frac{x_{n-r}}{l^2} \left(\rho_{r+1} k_r \mathcal{L}_{r+1} - \frac{\mathcal{M}_r}{\varpi_r} \right), \quad \kappa_r = \frac{1}{k_r (1 + \mathcal{U}_{r+1})}, \\
 \Sigma_r &= 1 + \frac{\rho_r \kappa_r}{\varpi_r}, \quad \Theta_r = \Delta_r \kappa_r \frac{x_r}{x_{n-r}}.
 \end{aligned}$$

L'équation de récurrence (B, c) est identiquement satisfaite. Quant à l'équation (B, d), elle se met sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. C'est pourquoi l'on a déduit une autre formule directement de l'équation (17'') de $H_{r_i}^r$, en tenant compte des expressions (13), (7), (15), (17), (10), (6), (2') et (2'') de $\Delta_{h_i}^{r_i}$, $(t_r)_h$, ω_{r_i} , Δ_r^r , γ_3 , δ_{r-1} , λ_{r_g} et λ_{r_i} . λ_{r_g} et λ_{r_i} doivent être pris en valeur absolue, car le diagramme de Williot de la figure 7(f) a été tracé en tenant compte du sens des déformations longitudinales des barres du panneau r . Si l'on pose les nouvelles notations

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_r = \frac{l-d}{c} \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_i} \frac{l_i^3}{l^3} - \frac{d}{c} \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_g} \frac{l_g^3}{l^3} + \frac{\gamma_{r_i}}{x_r} \theta_r, \\ \delta_r = \frac{d}{c} - \frac{\gamma_{r_i}}{x_r} \quad \text{et} \quad A_r = \frac{l_g}{l} I_{r-1}, \end{array} \right.$$

cette nouvelle équation s'écrit

$$(46) \quad \boxed{\varpi_r H_{r_i}^r = \Psi_r + \delta_r A_r - H_{r-1_i}^{r-1}.$$

L'équation (B, f) se simplifie comme suit

$$(47) \quad \varpi_r V_{r_e}^r = \varphi_r + V_{r-1_e}^{r-1} \quad \text{ou} \quad V_{r_e}^r = 1 - \frac{\rho_r}{\varpi_r}.$$

Cela étant, dans les cas où l'étude des lignes d'influence pour des charges verticales est seule nécessaire, les équations de récurrence (B, a, c, e, f et h) paraissent à première vue seules nécessaires. Mais il entre dans l'expression du symbole L^{r-1} de la formule B(a) le paramètre H^{r-1} , qui nécessite le calcul de $H_{r-1_i}^{r-1}$ et de $H_{r-1_e}^{r-1}$. On peut cependant établir une formule de récurrence qui permet de calculer directement H^{r-1} sans passer par $H_{r-1_i}^{r-1}$ et $H_{r-1_e}^{r-1}$. En effet, si l'on effectue la soustraction de l'équation (B, g) et de la nouvelle équation (46) de $H_{r_i}^r$ et si l'on pose

$$(48) \quad \tau_r - \Psi_r = \Omega_r,$$

on peut écrire la formule de récurrence suivante entre H^r et H^{r-1}

$$(49) \quad \boxed{\varpi_r H^r = \Omega_r - \mathcal{G}_r V_{r-1_e}^{r-1} - \mathcal{H}_r H^{r-1}.$$

Cette formule permet de simplifier considérablement l'expression du paramètre $\mathfrak{N}_r$ [voir expressions (44)]. Celui-ci s'écrit en effet

$$\mathfrak{N}_r = -\varpi_r \mathbf{H}_r.$$

En vertu de la symétrie de l'arc, on peut voir aisément, à l'aide des expressions de $\mathcal{L}_r$ et de $\mathfrak{N}_r$, que l'on a $\mathcal{L}_r = -\mathfrak{N}_{n-r+1}$. Cette propriété est d'ailleurs évidente si l'on se reporte aux formules (21) et (23) de δ_r et $\delta_{(n-r)'}'$ (Chap. II).

On peut encore éliminer le paramètre $\mathfrak{N}_r$ des expressions (44), si l'on tient compte de l'équation de récurrence (47).

D'autre part, nous supprimerons les notations $\lambda_r, \nu_r, \omega_r, \delta_r, \beta_r, \mathcal{B}_r, \Psi_r, \Phi_r, \Omega_r, \Lambda_r, \mathcal{E}_r, \mathcal{K}_r, \mathcal{C}_r, \mathcal{A}_r, \mathfrak{V}_r$ et $\mathfrak{N}_r$ des expressions générales (A) du Chapitre II, car elles ne sont d'aucune utilité dans le cas particulier actuel. Nous emploierons, en outre, les symboles nouveaux suivants : $A_r, \nu_r, \chi_r, \beta_r, \psi_r, \Omega_r, \delta_r, \Phi_r, \eta_r, \Psi_r, \kappa_r, \Lambda_r, \mathfrak{J}_r$, qui sont écrits dans les expressions (A') ci-après.

Si, en plus, on tient compte de la symétrie, on peut déduire la plupart des fonctions (A) relatives aux tronçons de droite de la ferme, des fonctions analogues relatives aux tronçons de gauche de celle-ci. On a notamment les relations suivantes, que l'on établit aisément et dont la plupart sont d'ailleurs vraies dans le cas le plus général traité au Chapitre II :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \rho_{n-r} = \frac{1}{\rho_{r+1}}, & \nu_{n-r} = \frac{\nu_{r+1} d, g}{\rho_{r+1}}, & \nu_{n-r} = \frac{\nu_{r+1} i, e}{\rho_{r+1}}, \\ d_{n-r} = -d_{r+1}, & \eta_{n-r} = \frac{1}{\eta_r}, & \Theta_r = \Delta_{n-r}, \\ \Sigma_r = \mu_{n-r}, & \eta_r \mu_{n-r} = \mu_r, & \Phi_{n-r} = \eta_r \Phi_r, \\ \frac{\Phi_{n-r}}{\mu_r} = \frac{\Phi_r}{\mu_{n-r}}, & \kappa_r = \frac{1}{\eta_r}. \end{array} \right.$$

Ces diverses observations nous permettent d'écrire finalement les paramètres (44) sous les formes (A') suivantes, beaucoup plus simples :

(A')

$$\pi_r = 1, \quad v_{r_i, e, g, d} = \frac{\sigma_{r-1}}{l^3} \frac{l_{i, e, g, d}^3}{\sigma_{i, e, g, d}}, \quad \rho_r = \frac{\sigma_{r-1}}{\sigma_r}, \quad \theta_r = v_{r_g} + v_{r_i},$$

$$\alpha_r = v_{r_i} + v_{r_e}, \quad \gamma_r = v_{r_g} + v_{r_d}, \quad \varphi_r = \alpha_r + \gamma_r,$$

$$\Psi_r = \frac{l-d}{c} v_{r_i} - \frac{d}{c} v_{r_g} + \frac{y_{r_i}}{x_r} \theta_r, \quad \delta_r = \frac{d}{c} - \frac{y_{r_i}}{x_r}, \quad \xi_r = \varphi_r + \rho_r,$$

$$H^r = H_{r_e}^r - H_{r_i}^r, \quad \omega_r = \varepsilon_r + V_{r-1}^{r-1}, \quad \tau_r = \frac{d}{c} v_{r_d} + \frac{d+l}{c} v_{r_e} + \frac{y_e}{x_r} \theta_r,$$

$$\xi_r = 1 + \frac{d}{l} - \frac{c}{l} \frac{y_e}{x_r}, \quad \zeta_r = \frac{d}{l} \frac{l+d}{c} + \left(1 - \frac{d}{l}\right) \frac{y_e}{x_r},$$

$$A_r = \left(\frac{d}{l} - 1\right) V_{r-1}^{r-1} - \frac{c}{l} H^{r-1}, \quad \chi_r = \frac{\theta_r - A_r}{x_r},$$

$$\eta_r = \frac{V_{r_e}^r}{V_{n-r}^{n-r}}, \quad k_r = \eta_r - V_{r_e}^r, \quad \mu_r = 1 + k_r,$$

$$\Delta_r = \frac{x_{n-r}}{lt} (H^r + \eta_r H^{n-r}), \quad \Phi_r = \frac{H_{r_i}^r}{\eta_{1r}} + H_{n-r-i}^{n-r} - t \frac{y_i}{x_r} \Delta_{n-r},$$

$$\Omega_r = \frac{d}{c} \varphi_r + \frac{l}{c} (v_{r_e} - v_{r_i}) + \frac{l}{x_r} \theta_r, \quad \omega_r = -2 \frac{d}{c} + \frac{d-l}{x_r} \quad \text{et} \quad \psi_r = \frac{x_{r-1}}{x_r}.$$

Les formules de récurrence (B) et (C) se réduisent aux suivantes :

Pour les nœuds $(x, y)_{e,i}$ des montants 0, 1, ..., $r-1$:

$$(a) \quad \varpi_r V_x^r = x \chi_r - V_x^{r-1}$$

et

$$(b) \quad \varpi_r H_y^r = \gamma \chi_r - H_y^{r-1}.$$

Pour le nœud r_i du montant r :

$$(c) \quad V_{r_i}^r = 0$$

et

$$(d) \quad \varpi_r H_{r_i}^r = \Psi_r + \delta_r A_r - \underline{H_{r-1}^{r-1}}_i$$

ou bien

$$(B') \quad (d') \quad \varpi_r H^r = \Omega_r - \varpi_r \underline{V_{r-1}^{r-1}}_e - \psi_r H^{r-1}$$

avec

$$(e) \quad H_{0_i}^0 = V_{0_i}^0 = 0.$$

Pour le nœud r_e du montant r :

$$(f) \quad V_{r_e}^r = 1 - \frac{\rho_r}{\varpi_r}$$

et

$$(g) \quad \varpi_r H_{r_e}^r = \tau_r + \varpi_r \underline{V_{r-1}^{r-1}}_e - \xi_r H^{r-1} - \underline{H_{r-1}^{r-1}}_i$$

avec

$$(h) \quad H_{0_e}^0 = 0 \quad \text{et} \quad V_{0_e}^0 = 1.$$

Pour les nœuds $(x, y)_{e,i}$ des montants 0, 1, ..., r , à gauche du montant r considéré :

$$(a) \quad \mu_r Q_x^r = V_x^r - x \Delta_r,$$

$$(b) \quad \mu_r R_y^r = H_y^r - y \Delta_r.$$

Quant aux équations (D), elles s'écrivent, si l'on tient compte des simplifications dues à la symétrie de l'arc, c'est-à-dire de la corres-

pondance de Δ et Θ , de Σ et μ , de x et η , et des égalités

$$(a) \quad V_{x'}^{n-r'} = V_x^{n-r}, \quad \Pi_{y'}^{n-r'} = -H_y^{n-r} :$$

la première, pour $x = x' = x_{n-r}, \dots, 2, 1, 0$

$$\mu_{n-r} Q_{x'}^{n-r'} = V_{x'}^{n-r'} - x' \Delta_{n-r} = V_x^{n-r} - x \Delta_{n-r} = \mu_{n-r} Q_x^{n-r};$$

la deuxième, pour $y = y' = y_{n-r}, \dots, 2, 1, 0$

$$\begin{aligned} \mu_{n-r} R_{y'}^{n-r'} &= H_{y'}^{n-r'} + \Phi_r + y' \Delta_{n-r} = -H_y^{n-r} + \Phi_r + y \Delta_{n-r} \\ &= \Phi_r - \mu_{n-r} R_y^{n-r}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut finalement mettre les équations (D) sous les formes très simples

Pour les nœuds $(x', y')_{e,i}$ des montants $(n-r)', \dots, 2', 1', 0'$, à droite du montant r considéré :	
(D')	(a) $Q_{x'}^{n-r'} = Q_x^{n-r}$ et (b) $R_{y'}^{n-r'} = \frac{\Phi_r}{\mu_{n-r}} - R_y^{n-r},$

$\frac{\Phi_r}{\mu_{n-r}}$ est une constante pour un même montant.

Les symboles (A') sont tous, sauf χ_r et Δ_r , des fonctions homogènes. D'autre part, ils sont, à part H_r , ϖ_r , A_r , χ_r , η_r , k_r , μ_r , Δ_r et Φ_r , des fonctions directes des dimensions géométriques et des sections transversales de l'arc, qui peuvent être calculées avant l'application des formules (B'), (C'), (D'). Le calcul de ces paramètres a été effectué à la machine à calculer et est consigné dans les Tableaux II et III. Lorsqu'un de ces symboles comporte plusieurs termes, tels Ψ , τ , ξ , ζ , on a donné dans les tableaux les valeurs des différents termes, afin que le calcul ne nécessite aucune écriture autre que celle des résultats fournis par les tableaux. Il en sera de même des Tableaux IV et VII ci-après. Les données du Tableau I ont été utilisées à cette fin. On a ainsi réduit à son minimum le travail matériel nécessité par l'application de la méthode actuelle. En outre, le travail intellectuel

TABLEAU II. — Calcul des paramètres (Λ').

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_r m^2$	0,005.703	0,004.697	0,004.697	0,004.697	0,003.107	0,004.697	0,004.697	0,004.697	0,005.703
σ_{r_g}		0,003.703	0,006.547	0,007.754	0,007.754	0,007.754	0,007.754	0,006.547	0,005.703
σ_{r_t}		0,013.402	0,011.166	0,007.754	0,005.703	0,005.703	0,007.754	0,011.166	0,013.402
σ_{r_g}		0,001.488	0,001.640	0,001.792	0,003.107	0,003.107	0,004.697	0,004.697	0,004.697
σ_{r_t}		0,004.697	0,004.697	0,004.697	0,003.107	0,003.107	0,001.792	0,001.640	0,001.488
ρ_r		1,214.179	1,000.000	1,000.000	1,511.748	0,661.486	1,000.000	1,000.000	0,823.602
ν_{r_g}		3,164.716	4,931.394	8,079.609	7,381.605	7,016.538	9,308.803	11,539.939	13,476.544
ν_{r_t}		16,362.937	11,539.939	9,308.803	10,607.237	4,882.828	8,079.609	4,931.394	2,606.466
ν_{r_1}		1,456.917	1,440.204	2,073.939	2,819.802	1,865.259	2,073.939	1,440.204	1,199.919
ν_{r_g}		3,423.743	2,456.289	2,073.939	2,073.939	1,371.881	2,073.939	2,456.289	2,819.801
θ_r		4,621.633	6,371.598	10,153.548	10,201.407	8,881.797	11,382.742	12,980.143	14,676.463
γ_r		19,527.653	16,471.333	17,388.412	17,988.842	11,899.366	17,388.412	16,471.333	16,083.010
α_r		4,880.660	3,896.493	4,147.878	4,893.741	3,237.140	4,147.878	3,896.493	4,019.720
φ_r		24,408.313	20,367.826	21,536.290	22,882.583	15,136.506	21,536.290	20,367.826	20,102.730
ε_r		25,622.492	21,367.826	22,536.290	24,394.331	15,797.992	22,536.290	21,367.826	20,926.332

TABLEAU III. — *Calcul des paramètres (A') (suite).*

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{l - d_r}{c_r} \nu_{r_1} \dots$		-0,310.801	0,099.347	0,630.355	1,515.813	1,493.820	2,348.465	2,309.562	2,871.555
$-\left(\frac{d}{c}\right)_r \nu_{r_2} \dots$		-4,124.337	-3,783.992	-3,346.687	-0,971.803	0,923.741	3,855.836	8,854.907	17,562.970
$\frac{y_{r_1}}{x_r} \nu_{r_1} \dots$		6,023.031	6,371.598	7,791.096	5,889.785	3,678.959	3,049.996	1,708.868	0
$\Psi_r \dots$		1,587.893	2,686.953	5,074.764	6,433.795	6,096.520	9,254.298	12,873.337	20,434.525
$\delta_r \dots$		0	-0,232.673	-0,353.113	0,445.699	-0,545.865	-0,682.163	-0,898.980	-1,303.225
$\left(\frac{d}{c}\right)_r \nu_{r_2} \dots$		21,324.589	8,854.907	3,855.836	1,396.464	-0,642.834	-3,346.687	-3,783.992	-3,396.812
$\frac{d_r + l}{c_r} \nu_{r_1} \dots$		8,193.441	3,938.991	2,348.465	1,660.944	0,737.468	0,630.355	0,169.438	-0,601.541
$\frac{y_{r_2}}{x_r} \nu_{r_1} \dots$		11,060.140	9,386.670	10,687.388	7,930.066	5,046.590	4,493.270	3,138.009	1,467.646
$\zeta_r \dots$		40,578.170	22,180.568	16,891.689	10,987.474	5,141.224	1,776.938	-0,476.545	-2,530.707
$\frac{c_r y_{r_2}}{l x_r} \dots$		2,195.732	1,761.557	1,465.667	1,161.590	0,849.050	0,549.664	0,289.074	0,091.752
$\xi_r \dots$	0		0,155.959	0,111.108	0,035.137	-0,045.777	-0,126.439	-0,206.591	-0,287.483
$\frac{d_r l + d_r}{l c_r} \dots$		2,861.534	1,471.362	0,653.123	0,157.552	-0,105.753	-0,175.306	-0,063.292	0,255.083
$\left(1 - \frac{d_r}{l}\right) \frac{y_{r_2}}{x_r} \dots$		-0,468.409	0,121.514	0,445.477	0,624.424	0,679.974	0,622.422	0,463.568	0,219.573
$\zeta_r \dots$		2,393.124	1,592.876	1,098.600	0,781.976	0,574.221	0,447.116	0,400.276	0,474.656

est des plus aisés : il se réduit exclusivement à des calculs numériques qui sont des plus simples avec la disposition actuelle en tableaux.

Les valeurs numériques des paramètres ont été inscrites dans les colonnes successives correspondant à leur indice r . Cet indice désigne, ou bien le numéro d'ordre du panneau, ou bien celui du montant considéré.

On a effectué tous les calculs avec six décimales uniquement dans le but de voir jusqu'à quelle décimale les vérifications ultérieures seront satisfaites. On verra que ces vérifications ont lieu jusqu'à la cinquième décimale. Dans le calcul de fermes à montants et croix de Saint-André par la méthode actuelle, il suffirait donc d'employer un nombre de décimales supérieur d'une unité à celui que l'on désire obtenir sans erreur.

a. Première phase de la résolution de l'hyperstaticité intérieure. — Les éléments V et H qui entrent dans les formules (B') sont, comme nous l'avons vu au Chapitre II, les équations de récurrence des lignes d'influence auxiliaires du montant r d'extrémité de droite de la ferme partielle à r panneaux, *isolée*, constituée des r panneaux de la ferme totale qui se trouvent à gauche du montant r considéré. La ferme étant symétrique, on peut se passer du calcul des lignes d'influence V et H analogues aux précédentes, mais relatives aux montants d'extrémités de gauche des fermes partielles *isolées* et constituées des panneaux de la ferme totale qui se trouvent à droite du montant considéré. En effet, ces dernières lignes d'influence sont, ou bien symétriques (pour le cas des charges verticales), ou bien antisymétriques (pour le cas des forces horizontales), de celles des montants d'extrémité de droite des tronçons symétriques de gauche. En résumé, elles s'expriment par les relations (a) que nous venons d'écrire plus haut.

Les lignes d'influence précédentes ne sont pas les lignes d'influence réelles des montants considérés. Ce sont des lignes auxiliaires qui préparent le calcul des lignes d'influence réelles, désignées par les notations Q et R . Les éléments V et H des formules (B') peuvent donc être regardés comme des paramètres au même titre que les symboles (A').

Le Tableau IV reproduit entièrement le calcul des paramètres $V_{r,c}^r$,

TABEAU IV. — Calcul de V_r et de H_r , H'_r et H''_r .

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ϖ_r		26,622.492	22,322.219	23,491.492	25,351.762	16,738.361	23,496.771	22,325.267	21,881.540
V_r	$V_0 = 1$	0,954.392	0,955.202	0,957.431	0,940.369	0,960.481	0,957.441	0,955.208	0,962.361
$\frac{p_r}{\varpi_r}$		0,045.607	0,044.798	0,042.569	0,039.631	0,039.519	0,042.559	0,044.792	0,037.639
$\left(\frac{d_r}{l} - 1\right) V_{r-1}$		0,195.731	-0,078.721	-0,404.265	0,769.078	-1,125.365	-1,514.462	1,835.909	-2,097.380
A_r		0,195.731	-1,937.428	-1,671.863	-1,543.519	1,396.278	-1,417.198	-1,427.599	-1,508.837
$\delta_r A_r$		0	0,450.787	0,590.357	0,687.945	0,762.179	0,966.760	1,283.383	1,966.354
H'_r	0	0,059.645	0,137.894	0,235.286	0,371.636	0,393.531	0,418.250	0,615.378	0,995.611
$\zeta_r V_{r-1}$		2,393.124	1,520.229	1,049.385	0,748.688	0,539.980	0,429.447	0,383.241	0,453.395
H''_r	0	1,554.452	0,910.332	0,518.205	0,181.298	0,060.851	0,341.473	-0,641.452	-1,127.096
$\xi_r H^{r-1}$		0	0,242.432	0,101.145	0,018.211	-0,008.299	0,008.832	0,070.545	0,184.407
H'''_r	0	1,614.097	1,048.226	0,753.551	0,452.934	0,323.680	0,076.777	-0,026.074	-0,131.485
$\frac{c_r}{l} H^{r-1}$		0	1,858.707	1,267.598	0,774.441	0,270.913	-0,097.264	-0,408.310	-0,588.543
χ_r		1,205.945	0,982.968	0,843.298	0,587.246	0,395.658	0,465.742	0,396.580	0,404.632

$H_{r_i}^r$, $H_{r_e}^r$ et, par suite, H^r , effectué en appliquant les *formules de récurrence* (B' , f , d et g). L'équation (B' , f) est indépendante des paramètres H . On l'applique comme suit : on part de $V_{0_e}^0 = 1$ [formule (B' , h)] correspondant à la ferme réduite seulement au montant 0 d'extrémité de gauche, *isolé*; on calcule $\varpi_1 = \varepsilon_1 + V_{0_e}^0 = \varepsilon_1 + 1$, puis $V_{1_e}^1 = 1 - \frac{\varrho_1}{\varpi_1}$, c'est-à-dire l'effort de compression interne du montant 1 d'extrémité de droite du système réduit au premier panneau de gauche de l'arc, cet effort étant dû à une force verticale unitaire appliquée au nœud 1_e ; ensuite $\varpi_2 = \varepsilon_2 + V_{1_e}^1$, et ainsi de suite jusque $V_{8_e}^8$. Nous avons également renseigné dans le Tableau IV les valeurs de $\frac{\varrho_r}{\varpi_r}$ afin d'éviter toute écriture autre que celles du tableau. On remarquera que les $V_{r_e}^r$ sont tous très peu différents de l'unité. Le rapport $\frac{\varrho_r}{\varpi_r}$ est très différent de l'unité. Il en résulte que l'application de la formule (B' , f) ne présente aucun danger de production d'erreurs relatives systématiques, car le paramètre $V_{r_e}^r$ se met sous forme d'une différence de deux termes très écartés l'un de l'autre.

Quant aux paramètres $H_{r_e}^r$, $H_{r_i}^r$ et H^r , on les calcule simultanément comme suit, en appliquant les formules de récurrence (B' , d et g). On part des valeurs $H_{0_i}^0 = H_{0_e}^0 = H^0 = 0$ [formules (B' , e et h)] correspondant encore au système réduit au montant 0, *isolé*, d'extrémité de gauche de l'arc; on a déterminé au préalable les valeurs de $\left(\frac{d}{l} - 1\right) V_{r-1_e}^{r-1}$ et $\zeta_r V_{r-1_e}^{r-1}$; on calcule successivement $A_1 = \frac{d_1}{l} - 1$, $\delta_1 A_1$, $H_{1_i}^1 = \frac{\Psi_1 + \delta_1 A_1}{\varpi_1}$ [formule (B' , d)], $H_{1_e}^1 = \frac{\tau_1 + \zeta_1}{\varpi_1}$, $H^1 = H_{1_e}^1 - H_{1_i}^1$, $\xi_2 H^1$, $\frac{c_2}{l} H^1$, puis $A_2 = \left(\frac{d_2}{l} - 1\right) V_{1_e}^1 - \frac{c_2}{l} H^1$, et ainsi de suite.

Connaissant A_r , on peut calculer χ_r . Ce paramètre nous permet d'appliquer les formules de récurrence (B' , a et b). Celles-ci donnent les ordonnées successives des lignes d'influence auxiliaires du montant quelconque r d'extrémité de droite de la ferme partielle de gauche à r panneaux, r variant progressivement de 0 à 8. Ces lignes d'influence se rapportent aux cas où les forces extérieures unitaires sont, ou bien verticales et positives vers le bas (notations V), ou bien horizontales et positives vers la droite (notations H).

Nous ne considérerons que le cas d'application des forces extérieures aux nœuds de la membrure extérieure (Tableaux V et VI).

TABLEAU V. — Lignes d'influence des fermes partielles de gauche; forces verticales appliquées à la membrure extérieure.

$r_e =$	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
$V_x^0 \quad x = x_e^0, \dots$	1								
$V_x^1 \quad x = x_e^0, 1 \dots$	-0,037.562	0,954.393							
$V_x^2 \quad x = x_e^0, \dots, 2 \dots$	0,001.683	0,118.858	0,955.202						
$V_x^3 \quad x = x_e^0, \dots, 3 \dots$	-0,000.072	0,126.688	0,262.784	0,957.431					
$V_x^4 \quad x = x_e^0, \dots, 4 \dots$	0,000.003	0,080.016	0,185.439	0,287.058	0,940.369				
$V_x^5 \quad x = x_e^0, \dots, 5 \dots$	0	0,081.972	0,188.731	0,314.319	0,416.575	0,960.481			
$V_x^6 \quad x = x_e^0, \dots, 6 \dots$	0	0,059.886	0,137.934	0,228.769	0,327.631	0,407.696	0,957.441		
$V_x^7 \quad x = x_e^0, \dots, 7 \dots$	0	0,062.512	0,143.979	0,238.851	0,340.600	0,443.191	0,517.507	0,955.208	
$V_x^8 \quad x = x_e^0, \dots, 8 \dots$	0	0,065.010	0,149.732	0,248.394	0,354.274	0,460.115	0,559.715	0,628.158	0,962.361

TABLEAU VI. — Lignes d'influence des formes partielles de gauche; forces horizontales appliquées à la membrane extérieure.

$r_e =$	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
$\Pi_y^0 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots$	0								
$\Pi_y^1 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, 1, \dots$	0, 181, 192	1, 614, 097							
$\Pi_y^2 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots, 2, \dots$	0, 168, 025	0, 314, 451	1, 048, 226						
$\Pi_y^3 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots, 3, \dots$	0, 136, 439	0, 301, 904	0, 402, 416	0, 753, 551					
$\Pi_y^4 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots, 4, \dots$	0, 087, 274	0, 191, 538	0, 272, 587	0, 312, 178	0, 452, 934				
$\Pi_y^5 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots, 5, \dots$	0, 089, 337	0, 196, 166	0, 278, 076	0, 330, 246	0, 340, 437	0, 323, 680			
$\Pi_y^6 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots, 6, \dots$	0, 065, 270	0, 143, 315	0, 203, 203	0, 240, 822	0, 253, 977	0, 241, 102	0, 076, 777		
$\Pi_y^7 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots, 7, \dots$	0, 068, 131	0, 149, 598	0, 212, 110	0, 251, 408	0, 264, 797	0, 251, 395	0, 217, 773	-0, 026, 074	
$\Pi_y^8 \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_e^0, \dots, 8, \dots$	0, 070, 854	0, 155, 577	0, 220, 587	0, 261, 454	0, 275, 393	0, 261, 454	0, 220, 328	0, 163, 605	-0, 131, 485

Dans $V_{x'}^0$, x ne peut prendre que la valeur correspondant au nœud 0_e du montant 0, c'est-à-dire que $V_{x'}^0$ prend seulement la valeur $V_{0_e}^0 = 1$. Dans $V_{x'}^1$, x prend les valeurs correspondant aux nœuds 0_e et 1_e . On calcule $V_{0_e}^1$ à partir de $V_{0_e}^0$ à l'aide de la formule (B', a) . Quant à $V_{1_e}^1$, il a déjà été calculé dans le Tableau IV. On procédera de même pour $V_{x'}^2, V_{x'}^3, \dots$, et en général pour $V_{x'}^r$. Il suffira d'appliquer la formule (B', a) pour les nœuds $0_e, 1_e, \dots, \underline{r-1}_e$ et, pour le nœud r_e , de recopier la valeur de $V_{r_e}^r$ donnée par le Tableau IV.

Le procédé de calcul du Tableau VI, qui donne les ordonnées des lignes d'influence H_y^r , est en tous points analogue au précédent. On appliquera la formule (B', b) pour les nœuds $0_e, 1_e, \dots, \underline{r-1}_e$ et, pour le nœud r_e , on recopiera la valeur de $H_{r_e}^r$ donnée par le Tableau IV.

Les lignes d'influence V_x^8 et H_y^8 du montant 8 d'extrémité de droite de l'arc sont des lignes d'influence réelles, car elles correspondent à l'arc réel, c'est-à-dire à l'arc complet.

On constate que, dans le calcul de V_x^r et de H_y^r , les termes V_x^{r-1} et H_y^{r-1} sont relativement faibles vis-à-vis, respectivement, de $x\chi_r$ et de $y\chi_r$. Il en résulte que l'influence d'une erreur sur V_x^{r-1} ou H_y^{r-1} disparaît très rapidement au cours du calcul de $V_x^r, V_x^{r+1}, \dots$ ou $H_y^r, H_y^{r+1}, \dots$, d'autant plus qu'elle est à diviser par les valeurs successives de ω_r , qui sont grandes vis-à-vis de l'erreur supposée. Ainsi, une erreur importante sur un nombre des Tableaux V ou VI ne se répercute que sur les deux nombres suivants déduits successivement de celui-là. Par exemple, une erreur de six unités sur la troisième décimale de $H_{3_e}^3 = 0,751.689$ (Tableau VI, 3^e colonne) se transmet sous forme d'une erreur de neuf unités de la sixième décimale sur $H_{3_e}^3$ (3^e colonne) et d'une erreur, pratiquement nulle, de moins d'une unité de la sixième décimale sur $H_{3_e}^6$.

D'autre part, V_x^r et H_y^r étant constitués de la différence de deux termes très écartés, leur calcul se prête aisément à l'obtention d'une grande précision.

b. Deuxième phase de la résolution de l'hyperstaticité intérieure. — La connaissance des paramètres $V_{r_e}^r, H_{r_e}^r, H_{r_i}^r$ et H^r (Tableau IV) permet de calculer les paramètres $\eta_r, k_r, \mu_r, \Delta_r, \Phi_r$

TABLEAU VII. — Calcul des paramètres (Δ') (*fin*).

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
η_r	1,039.111	0,999.146	0,997.661	0,996.824	1	1,003.185	1,002.344	1,000.854	0,962.361
k_r		0,039.111	0,044.754	0,042.459	0,039.393	0,059.631	0,042.705	0,044.903	0,045.646
μ_r	1,039.111	1,044.754	1,042.459	1,039.393	1,059.631	1,042.705	1,044.903	1,045.646	
$\frac{x_r}{lt}$	0	0,022.938	0,052.831	0,087.643	0,125.000	0,162.357	0,197.169	0,227.062	0,250.000
$\eta_r H^{8-r}$	-1,171.179	-0,640.905	-0,340.674	-0,069.629	0,181.298	0,519.916	0,912.466	1,555.780	0
Δ_r	-0,292.795	0,207.432	0,112.319	0,072.839	0,045.324	0,039.445	0,030.166	0,020.973	0
$t \frac{y_{r1}}{x_r} \Delta_{8-r}$		1,093.297	1,206.644	1,210.689	1,046.724	1,206.839	1,203.830	1,092.357	0
$H \frac{r_1}{r_2} \frac{r_1}{r_2}$	0	0,059.696	0,138.217	0,236.036	0,271.636	0,392.281	0,417.272	0,614.853	1,034.550
Φ_r		-0,418.223	-0,650.177	-0,581.122	-0,503.452	-0,579.272	-0,648.664	-0,417.859	+1,034.550
$\frac{\Phi_r}{\mu_{8-r}}$		-0,399.966	-0,622.237	-0,557.322	-0,475.120	-0,557.317	-0,622.244	-0,399.959	+0,995.611

et $\frac{\Phi_r}{\mu_{n-r}}$ exprimés dans les formules (A'). On obtient ainsi le Tableau VII dont l'établissement est progressif et ne comporte aucune difficulté spéciale. Nous avons vu que, par suite de la symétrie de l'arc, on doit trouver que les valeurs de $\frac{\Phi_r}{\mu_{n-r}}$ doivent être symétriques [formules (50)]. On obtient ainsi des vérifications des calculs précédents.

Les paramètres du Tableau VII entrent dans les équations de récurrence (C') et (D') des lignes d'influence réelles des montants surabondants. L'obtention de celles-ci est immédiate si l'on a fait au préalable le calcul des paramètres V et H. Les calculs précédents ne sont donc pas inutiles, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer au chapitre précédent.

On sait que les lignes d'influence réelles (C') et (D') se rapportent à un arc isostatique extérieurement, à appui simple à droite (*fig.* 14, c). Les formules (D') ramènent pratiquement le problème à l'application des formules (C'), c'est-à-dire au calcul des ordonnées des lignes d'influence réelles Q_x^r et R_x^r qui se trouvent à gauche du montant r quelconque considéré. Ces simplifications intéressantes résultent de la symétrie de l'arc : les montants symétriques ont des lignes d'influence symétriques dans le cas des charges extérieures verticales et antisymétriques, à une constante $\frac{\Phi_r}{\mu_{n-r}}$ près dans celui des forces extérieures horizontales. Ces propriétés sont d'ailleurs évidentes, tout au moins pour le cas des forces extérieures verticales.

On en déduit le processus suivant d'application des formules (C') et (D'). La formule (C', α) montre que le Tableau VIII des valeurs de Q_x^r se déduit du Tableau V des valeurs de V_x^r .

Dans Q_x^1 par exemple, on donne à x successivement les valeurs correspondant aux nœuds 0_e et 1_e . On obtient ainsi les ordonnées

$$Q_{0_e}^1 = \frac{V_{0_e}^1}{\mu_1} \quad \text{et} \quad Q_{1_e}^1 = \frac{V_{1_e}^1 - x_1 \Delta_1}{\mu_1}$$

de la ligne d'influence réelle du montant 1, qui se trouvent à gauche de ce montant. On voit que les seules variables avec x sont V_x^1 et x . Δ_1 et μ_1 sont constants pour toutes les ordonnées, à gauche du montant 1, de la ligne d'influence de ce montant. Il en est de même d'ailleurs d'un montant quelconque.

TABLEAU VIII. — Lignes d'influence des montants surabondants 1, 2, ..., 7, 8 dans l'arc isostatique extérieurement.
Cas des charges verticales appliquées à la membrure extérieure.

$x_e =$	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
$Q_1^1 \quad x = x_e^0, 1, \dots$	-0,035.953	0,184.827 0,184.832							
$Q_2^2 \quad x = x_e^0, \dots, 2, \dots$	0,001.614	-0,281.411	0,005.542 0,005.536						
$Q_3^3 \quad x = x_e^0, \dots, 3, \dots$	-0,000.069	-0,135.307	-0,339.549	-0,061.560 -0,061.555					
$Q_4^4 \quad x = x_e^0, \dots, 4, \dots$	0,000.003	-0,081.470	-0,186.564	-0,328.906	0,031.972 0,031.972	-0,328.906	-0,186.564	-0,081.470	0,000.003
$Q_5^5 \quad x = x_e^0, \dots, 5, \dots$	-0,000.002	-0,060.222	-0,138.770	-0,229.030	-0,357.076	-0,061.555 -0,061.560	-0,339.549	-0,135.307	0,000.069
$Q_6^6 \quad x = x_e^0, \dots, 6, \dots$	0	-0,048.641	-0,112.029	-0,185.897	-0,263.844	-0,359.779	0,005.536 0,005.542	-0,281.411	0,001.614
$Q_7^7 \quad x = x_e^0, \dots, 7, \dots$	0	-0,013.829	-0,031.851	-0,052.836	-0,075.416	-0,097.189	-0,137.834	0,184.832 0,184.827	-0,035.953
$Q_8^8 \equiv V_8^8, \dots, \dots$	0	+0,065.010	+0,149.732	+0,248.394	+0,354.274	+0,460.115	+0,559.715	+0,628.158	+0,962.361

TABLEAU IX. — Lignes d'influence des montants surabondants 1, 2, ..., 7, 8 dans l'arc isostatique extérieurement.
Cas des forces horizontales appliquées à la membrane extérieure.

$r_e =$	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e	
$R^1_y \quad y = y_e^{0,1} \dots$	-0,620.754	-0,198.868 -0,198.862	-0,358.458	-0,344.338	-0,341.372	-0,344.351	-0,353.042	-0,366.871	-0,384.893	$R^1_{y'}$
$R^2_y \quad y = y_e^{0,2} \dots$	-0,269.795	-0,644.666	-0,336.200 -0,336.205	-0,426.858	-0,416.461	-0,426.590	-0,457.193	-0,505.832	-0,569.223	$R^2_{y'}$
$R^3_y \quad y = y_e^{0,3} \dots$	-0,149.046	-0,325.033	-0,485.524	-0,309.378 -0,309.375	-0,295.681	-0,315.076	-0,352.919	-0,413.200	-0,491.682	$R^3_{y'}$
$R^4_y \quad y = y_e^{0,4} \dots$	-0,088.733	-0,194.920	-0,275.415	-0,336.736	-0,237.560 -0,237.560	-0,138.384	-0,199.705	-0,286.200	-0,386.387	$R^4_{y'}$
$R^5_y \quad y = y_e^{0,5} \dots$	-0,065.640	-0,144.122	-0,204.403	-0,241.646	-0,261.641	-0,247.942 -0,247.944	-0,071.793	-0,232.284	-0,408.271	$R^5_{y'}$
$R^6_y \quad y = y_e^{0,6} \dots$	-0,053.014	-0,116.405	-0,165.044	-0,195.647	-0,205.776	-0,195.379	-0,286.039 -0,286.037	+0,022.422	-0,352.449	$R^6_{y'}$
$R^7_y \quad y = y_e^{0,7} \dots$	-0,015.073	-0,033.095	-0,046.924	-0,055.615	-0,058.594	-0,055.628	-0,041.508	-0,201.097 -0,201.098	+0,220.795	$R^7_{y'}$
$R^8_y \equiv H^8_y \dots$	+0,070.854	+0,155.577	+0,220.587	+0,261.454	+0,275.393	+0,261.454	+0,220.328	+0,163.605	-0,131.485	

De la même manière, Q_x^2 se déduit de V_x^2 en donnant à x les valeurs successives $x_0 = 0$, x_1 et x_2 .

On obtient ainsi

$$Q_{0e}^2 = \frac{V_{0e}^2}{\mu_2}, \quad Q_{1e}^2 = \frac{V_{1e}^2 - x_1 \Delta_2}{\mu_2} \quad \text{et} \quad Q_{2e}^2 = \frac{V_{2e}^2 - x_2 \Delta_2}{\mu_2}.$$

On opérera de même pour les autres montants 3 à 7. On arrive ainsi au Tableau VIII en forme d'escalier. Quant à la ligne d'influence Q_x^8 , elle est identique à la ligne d'influence V_x^8 . Il suffit donc de recopier les valeurs de celle-ci.

Le procédé de calcul de R_y^r [formule (C', b)] est en tous points analogue à celui de Q_x^r . Il suffit de se rapporter au Tableau VI des valeurs de H_y^r et d'introduire, comme coefficient variable de Δ_r , les valeurs successives de y correspondant aux nœuds de la membrure extérieure. On obtient le Tableau IX semblable au Tableau VIII. On remarquera que, contrairement aux lignes d'influence auxiliaires V_x^r et H_y^r , les lignes d'influence de Q_x^r et R_y^r ne se déduisent pas l'une de l'autre mais au contraire s'obtiennent à partir de V_x^r ou H_y^r . Comme lors du calcul des Tableaux V et VI de ces dernières, on voit que celui de Q_x^r et R_y^r ne peut guère engendrer des erreurs systématiques, car ces grandeurs se présentent sous forme de soustraction de deux nombres très différents l'un de l'autre.

On complètera ensuite les Tableaux VIII et IX par la détermination des ordonnées des lignes d'influence de Q et R à droite des montants considérés. D'après la formule (D', a) il suffira, pour compléter le Tableau VIII, de recopier symétriquement les valeurs de Q trouvées en appliquant la formule (C', a). Ainsi, dans Q_x^5 , on recopiera, pour les cas où la charge verticale unitaire est appliquée aux nœuds 5_e, 6_e, 7_e et 8_e (ou $\overline{8-5}_e \equiv 3'_e, 2'_e, 1'_e$ et $0'_e$ comptés à partir de l'extrémité de droite), les valeurs de $Q_x^{8-5} \equiv Q_x^3$ trouvées pour les cas où la charge verticale unitaire est appliquée respectivement aux nœuds 3_e, 2_e, 1_e et 0_e. Comme on a calculé séparément Q_{5e}^5 et Q_{3e}^3 et comme ils doivent être égaux, on voit que chacune des lignes d'influence doit satisfaire à une vérification. Cette propriété est très avantageuse, car elle permet de s'assurer si l'on n'a pas commis une erreur au cours des calculs précédents. En général, on doit avoir

$$Q_{r_e}^r = Q_{n-r_e}^{n-r}.$$

Toutes ces vérifications sont ici satisfaites jusqu'à la cinquième décimale, alors que les calculs ont été faits avec six décimales. Ainsi, si l'on se bornait à exiger, par exemple dans un calcul pratique, les lignes d'influence avec trois décimales exactes, il suffirait d'effectuer les calculs avec quatre décimales.

Rappelons qu'il s'agit ici d'un arc symétrique, mais des vérifications analogues devraient avoir lieu aussi dans les cas d'arcs dissymétriques. La seule différence est que l'on devrait trouver que

$$Q'_{r_a} = Q_{\frac{n-r'}{n-r'_a}}$$

où $Q_{\frac{n-r'}{n-r'_a}}$ serait obtenu à l'aide de la formule (D, a) du Chapitre II.

Les lignes d'influence Q des montants symétriques étant elles-mêmes symétriques, il suffit de compléter le Tableau VIII pour la moitié des montants. Nous avons choisi les montants 4, 5, 6, 7, 8. La ligne d'influence du montant 4 est elle-même symétrique.

On complètera de même le tableau IX en calculant, à l'aide de la formule (D', b), les ordonnées des lignes d'influence de R'_r à droite du montant r . Il suffira de retrancher de $\frac{\Phi_r}{\mu_{n-r}}$, qui est une constante pour toutes les ordonnées complémentaires de la ligne d'influence du montant r , les valeurs symétriques, mais changées de signes, des ordonnées de la ligne d'influence du montant $n - r \equiv 8 - r$, trouvées à gauche de ce dernier à l'aide de la formule (C', b). Il est nécessaire, dans le cas actuel, de compléter les lignes d'influence R de tous les montants, car celles de montants symétriques ne sont ni symétriques ni antisymétriques. Elles ne sont que antisymétriques à une constante près. La raison en est que l'arc est appuyé dissymétriquement en ses deux extrémités au point de vue de l'action des forces extérieures horizontales; appui fixe à rotule à gauche, appui simple à rouleaux de dilatation à droite.

Encore une fois, la ligne d'influence R_y^8 est identique à H_y^8 obtenu à la fin du Tableau VI.

Nous avons représenté les lignes d'influence Q et R sur les figures 16 et 17, en traits longs interrompus. Nous n'avons représenté que celles des montants 4, 5, 6, 7, 8 pour les raisons suivantes :

α . Les lignes d'influence Q des montants symétriques sont symétriques.

b. Les lignes d'influence R des montants symétriques ne sont ni symétriques ni antisymétriques, mais l'étude actuelle n'est que partielle. Elle sera complétée ci-après par celle de l'influence de l'hyperstaticité extérieure de l'arc, lequel sera supposé, en dernière analyse, à deux rotules fixes. Or, il est évident que, dans cet arc, les lignes d'influence des montants symétriques, pour des forces extérieures horizontales, sont antisymétriques. Il suffira donc de tracer celles des montants d'une des moitiés de l'arc.

Nous avons cependant tracé en plus les lignes d'influence du montant 3 pour les deux cas de charges afin de montrer intuitivement, par les figures, les correspondances entre les lignes des montants des deux moitiés de l'arc.

En outre, on peut supposer que les forces horizontales peuvent être appliquées, non seulement aux barres et aux nœuds de la membrure extérieure, mais aussi aux nœuds o_i et 8_i et le long des montants $\bar{o}$ et $\bar{8}$. On aura ainsi, dans le cas des forces horizontales, des lignes d'influence complètes dans l'hypothèse où la force extérieure unitaire voyage aux différents points du contour extérieur de l'arc, entre les appuis o_i et 8_i . Pour compléter de cette façon les lignes d'influence des montants $\bar{3}$ à $\bar{8}$ trouvées ci-dessus pour le cas des forces horizontales, il suffit de calculer les points de ces lignes correspondant aux nœuds o_i et 8_i .

Or, la formule (B', b) permet d'écrire, pour un montant surabondant quelconque r ,

$$\varpi_r H_{0_i}^r = (\gamma_{0_i} = 0) \chi_r - H_{0_i}^{r-1} = -H_{0_i}^{r-1},$$

$H_{0_i}^0$ étant nul, il résulte de cette formule de récurrence que

$$(51) \quad H_{0_i}^r = 0$$

quel que soit r . C'est d'ailleurs évident.

De même, les formules (D', b) et (C', b) donnent en particulier lorsque la force unitaire horizontale est appliquée en 8_i ou o_i , vers la droite, l'effort $R_{0_i}^{\bar{8}-r'}$ dans le montant quelconque de numéro d'ordre r compté à partir de la gauche ou $\bar{8}-r'$ compté à partir de la droite

$$R_{0_i}^{\bar{8}-r'} = \frac{\Phi_r}{\mu_{\bar{8}-r}} - R_{0_i}^{\bar{8}-r}, \quad [\text{formule } (D', b)],$$

$$\mu_{\bar{8}-r} R_{0_i}^{\bar{8}-r} = H_{0_i}^{\bar{8}-r} - (\gamma_{0_i} = 0) \Delta_{\bar{8}-r} = 0 \quad [\text{formule } (C', b)],$$

en tenant compte de la relation (51). Dans la suite, nous désignerons l'effort $R_{0i}^{s-r'}$ par la notation plus simple R_{si}^r qui est équivalente à la précédente. On peut donc écrire

$$(52) \quad R_{0i}^r = 0 \quad \text{et} \quad R_{si}^r = \frac{\Phi_r}{\mu_{s-r}}.$$

Or, $\frac{\Phi_r}{\mu_{s-r}}$ a été calculé précédemment. Les valeurs en ont été données au Tableau VII. Les relations (52) nous fournissent les derniers points cherchés, au droit de o_i et 8_i , des lignes d'influence des montants surabondants (*fig. 17*).

Les calculs précédents exposés au présent paragraphe constituent toute la résolution de l'hyperstaticité *intérieure* de la ferme étudiée. On voit que, malgré la complexité du problème posé, à savoir le calcul d'un système de degré d'hyperstaticité élevé, égal à huit et, en plus, d'une ferme en arc, la méthode est rapide et surtout d'application très aisée. En outre, il est à remarquer que nous avons fait une étude complète des lignes d'influence de l'arc en ce sens que nous avons considéré, non seulement le cas où les forces extérieures sont verticales, mais aussi celui où elles sont horizontales. L'étude du seul cas où les charges extérieures sont verticales ne comporterait que la moitié des calculs précédents. Dans ce dernier cas, il suffirait d'appliquer les formules de récurrence (B', a, c, d', e, f, h), ($C', a \equiv D', a$) et de calculer les paramètres (A') correspondants, à savoir $\nu, \rho, \theta, \alpha, \gamma, \varphi, \epsilon, \varpi, \Omega, \omega, \psi, A, \chi, \eta, k, \mu$ et Δ .

On a calculé ci-dessus les ordonnées des lignes d'influence au droit des nœuds de la membrure extérieure. On a, en outre, supposé que les charges verticales sont transmises au droit de ces nœuds par l'intermédiaire de traverses. Les lignes d'influence sont donc linéaires entre ces nœuds (*fig. 16*). Elles le seraient encore si l'on supposait que les charges peuvent être appliquées aux différents points des barres de la membrure extérieure, même entre les nœuds.

Quant aux forces extérieures horizontales, si l'on fait à leur sujet l'hypothèse de ce dernier mode de transmission, les lignes d'influence correspondantes sont également formées, entre les ordonnées relatives aux nœuds de la membrure extérieure, de tronçons de droite (*fig. 17*).

On a reporté les lignes d'influence dans la direction et positivement dans le sens des forces extérieures auxquelles elles correspondent verticalement et vers le bas pour le cas des forces extérieures verti-

cales (*fig.* 16), horizontalement et vers la droite pour le cas des forces extérieures horizontales (*fig.* 17). On sait d'autre part que l'on a considéré les compressions internes comme positives.

2. Calcul des lignes d'influence exactes de la poussée $q(x, y)$. —

a. Considérations générales. — Connaissant les lignes d'influence des montants surabondants, nous pouvons à présent calculer celles de la poussée de l'arc, pour le cas des charges verticales et pour celui des forces horizontales.

On appliquera comme suit le théorème de Maxwell. On choisira d'abord comme sens positif de la poussée de l'arc celui qui produirait un rapprochement des nœuds d'appui o_i et 8_i de ce dernier. Cela étant, on rendra l'arc isostatique extérieurement en remplaçant l'appui fixe de droite, par exemple, par un appui simple à rouleaux de dilatation mobile sur un plan horizontal.

On appliquera ensuite au nœud 8_i de l'arc non encore sollicité une poussée $q = -1$ et l'on recherchera la déformée de la membrure supérieure due à cette sollicitation particulière (*fig.* 18, *a*). Les projections verticale et horizontale de cette déformée, mesurées à l'échelle essentiellement positive du déplacement horizontal du nœud 8_i , vers la droite, ne seront autres que les lignes d'influence cherchées de la poussée, avec son signe (*voir* Chap. 1, *d*).

Or, sous l'effet de la sollicitation $q = -1$ en 8_i , la rotule de gauche développe en o_i une réaction égale et opposée. Il n'existe aucune réaction verticale extérieure. On peut donc isoler l'arc à condition de le soumettre à la sollicitation de la figure 18 (*a*). Il n'est pas nécessaire d'introduire des plans d'appuis horizontaux à condition toutefois que l'on maintienne o_i et 8_i sur leur horizontale initiale. En outre, la sollicitation précédente est symétrique. L'arc étant également symétrique, elle développe dans les barres des deux moitiés de celui-ci des efforts internes égaux en grandeur et en signe. Il suffira donc de calculer seulement ceux de la moitié de droite.

A cette fin, on divisera le plan moyen de l'arc en régions $v, u, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s$ délimitées par les forces extérieures $q = -1$ et par les axes des barres, lesquels représentent aussi, implicitement, des forces, c'est-à-dire des efforts normaux intérieurs. On peut tracer une épure de Cremona (*fig.* 18, *b*), à condition d'avoir déterminé à l'avance, par une autre méthode, les

efforts internes dans les montants surabondants 1, 2, . . . , 8 dus à la sollicitation $q = -1$. Mais nous sommes déjà en possession de ces efforts.

b. Efforts dans les montants surabondants. — Ceux-ci ont en effet été obtenus au cours de la résolution hyperstatique exposée au paragraphe précédent du présent chapitre. On a trouvé [seconde formule (52)] que l'effort R_{8i}^r dans un montant quelconque r dû à une force unitaire horizontale, *dirigée vers la droite* et appliquée au nœud 8_i , est égal à $\frac{\Phi_r}{\mu_{8-r}}$, dont les valeurs sont consignées au Tableau VII. Une vérification a lieu à cette occasion : on constate que les efforts dans deux montants surabondants symétriques dus à $q = -1$ sont bien égaux et de même signe. D'autre part, on constate que $\frac{\Phi_8}{\mu_0}$ est égal à H_{8i}^8 , ce qui devait être vérifié.

c. Tracé de Cremona (fig. 18, b). — En possession des efforts internes dans les montants surabondants 1 à 8, on peut à présent tracer l'épure de Cremona de la figure 18(b). A cette fin, on coupera successivement toutes les barres convergeant aux nœuds successifs et l'on exprimera graphiquement, comme suit, l'équilibre de chacun des nœuds, par le procédé expliqué au Chapitre I(a). On adoptera notamment un sens de rotation commun dans l'ordre de succession des coupures des barres. On a arbitrairement choisi le sens indiqué par les flèches de la figure 18(a).

On est parti du nœud d'extrémité de droite 8_i où il ne reste que deux efforts internes inconnus : les efforts dans les barres $\bar{8}_i$ et $\bar{8}_g$. On coupe successivement la force $q = -1$ en passant de la région v à la région u , l'effort interne $R^{\bar{8}} = \frac{\Phi_8}{\mu_0} = +0,995.6$ en passant de la région u à la région a , l'effort interne $R^{\bar{8}_g}$ en passant de la région a à la région d et enfin l'effort interne $R^{\bar{8}_i}$ en passant de la région d à la région v . Dans la figure 18(b) de Cremona, on porte donc successivement les segments $\overrightarrow{vu}$ représentant l'effort $q = -1$ avec son sens, c'est-à-dire un effort unitaire dirigé vers la droite, et $\overrightarrow{ua} = R^{\bar{8}}$ à la même échelle et dirigé vers le bas. En effet, le montant $\bar{8}$ est comprimé et pousse donc sur le nœud 8_i . Ensuite, on trace par a une

parallèle à la barre $\bar{8}_g$ et, par c , une parallèle à la barre $\bar{8}_i$, qui se coupent au point d . Le segment $\overrightarrow{ad}$ représente en grandeur et en signe, à l'échelle du tracé de Cremona, l'effort $R^{\bar{8}_g}$ dû à la sollicitation $q = -1$. On voit que cet effort pousse sur le nœud 8_i . C'est donc une compression. De même, le segment $\overrightarrow{dv}$ représente l'effort $R^{\bar{8}_i}$. Celui-ci tire sur le nœud 8_i . C'est donc une traction.

On trace ensuite l'équilibre du nœud 8_e où il n'existe que deux efforts internes inconnus. On coupe successivement les barres $\bar{8}$, $\bar{8}_e$, et $\bar{8}_d$ en passant de la région a à la région u , puis à la région c et enfin à la région d . Dans le tracé de Cremona, on porte $\overrightarrow{au}$ dirigé vers le haut ($R^{\bar{8}}$ pousse sur le nœud 8_e), on trace par u une parallèle à $\bar{8}_e$ et par a une parallèle à $\bar{8}_d$. Elles se rencontrent en c . L'effort $R^{\bar{8}_e}$ est représenté par le segment $\overrightarrow{uc}$ en grandeur et signe (compression) et l'effort $R^{\bar{8}_d}$ par $\overrightarrow{ca}$ (traction).

Puis, on considère le nœud 7_i où l'on coupe successivement les barres $\bar{8}_i$, $\bar{8}_d$, $\bar{7}$, $\bar{7}_g$ et $\bar{7}_i$ en passant, dans l'ordre, par les régions $v d b e h v$. $\overrightarrow{vd}$ est déjà porté sur le tracé. On porte à sa suite $\overrightarrow{db}$ équipollent à $\overrightarrow{ac}$, puis $\overrightarrow{be} = R^{\bar{7}} = -0,399.96$ (vers le haut : $R^{\bar{7}}$ tire sur le nœud 7_i). Par e et v , on trace $\overrightarrow{eh}$ et $\overrightarrow{hv}$ parallèles respectivement à $\bar{7}_g$ et $\bar{7}_i$. Ces segments représentent $R^{\bar{7}_g}$ (compression) et $R^{\bar{7}_i}$ (traction).

De même, au nœud 7_e , on coupe successivement les barres $\bar{8}$, $\bar{8}_g$, $\bar{8}_e$, $\bar{7}_e$ et $\bar{7}_d$ en passant par les régions $e b c u g e$. $\overrightarrow{eb}$ est déjà porté (vers le bas); on joint $\overrightarrow{bc}$, équipollent à $\overrightarrow{da}$ et déjà construit; $\overrightarrow{cu}$ est déjà porté; on trace ensuite, par u et e , $\overrightarrow{ug}$ et $\overrightarrow{ge}$ parallèles respectivement à $\bar{7}_e$ et $\bar{7}_d$, qui représentent $R^{\bar{7}_e}$ (compression) et $R^{\bar{7}_d}$ (traction), en grandeur, direction et sens.

On voit qu'on obtient en particulier et indirectement le parallélogramme des forces $\overrightarrow{acbd}$ qui n'exprime pas autre chose que l'équilibre du nœud de croisement des diagonales du panneau 8. Celles-ci peuvent d'ailleurs être solidarisées ou non en ce nœud. Les

TABLEAU X. — Compressions internes R dans les barres de la moitié de droite de l'arc dues à une poussée $q = -1$ (fig. 18, a et b) et raccourcissement $\lambda = \frac{\Delta}{K}$ correspondants, à un facteur commun près.

r	MONTANTS		BARES DES MEMBRURES				DIAGONALES INCLINÉES A			
	R		extérieure		intérieure		gauche		droite	
		λ	R	λ	R	λ	R	λ	R	λ
4.....	-0,475.120	-2,912.0								
5.....	-0,557.317	-2,258.8	3,126	11,573.7	-3,520	-17,719.3	-0,267	-3,133.7	-0,454	-4,721.9
6.....	-0,622.244	-2,523.4	2,812	10,411.1	-3,480	-12,884.3	+0,148	+1,262.5	-0,502	-7,765.6
7.....	-0,399.959	-1,622.1	2,337	10,247.6	-3,100	-7,970.2	+0,498	+4,563.7	-0,658	-9,159.8
8.....	+0,995.611	+3,326.6	1,506	7,581.0	-2,105	-4,509.1	+0,730	+7,044.8	-0,938	-11,264.7

efforts internes sont les mêmes dans les deux cas; on montrerait très aisément que les lignes d'influence seraient également les mêmes.

La suite du tracé de Cremona se construit aisément de la même manière, jusqu'aux nœuds 5_i et 5_e inclus. On est ainsi en possession des efforts R dans toutes les barres dus à la sollicitation $q = -1$.

Si l'on trace encore l'équilibre du nœud 4_e en passant par les régions $\overrightarrow{sn} \dots$, on doit porter d'abord $\overrightarrow{sn} = R^{\bar{4}} = -0,475.1$ dirigé vers le bas. Ce faisant, on trouve que les points s et n du tracé sont symétriques par rapport à l'horizontale des points v et u , que nous avons tracée en traits d'axes. Par conséquent, si l'on continuait le tracé pour la moitié de gauche de l'arc, on trouverait une figure symétrique de la figure 18(b), par rapport à l'horizontale de v et u . On obtiendrait ainsi dans la moitié de gauche de l'arc, des efforts internes égaux à ceux de la moitié de droite de celui-ci. On a donc en traçant $\overrightarrow{sn}$ une vérification du tracé de Cremona (fig. 18, b).

Ce tracé fournit toutes les compressions internes R , en grandeur et en signe, développées dans les barres de la moitié de droite de l'arc. Ces efforts sont consignés dans le Tableau X ci-après, avec les efforts dans les montants $\bar{4}, 5, \dots, \bar{8}$.

d. Tracé de Williot. — A l'aide de ces efforts R , du coefficient d'élasticité longitudinale E , des longueurs l et des sections transversales σ des mêmes barres, on peut calculer les raccourcissements Λ correspondants de celles-ci. Ces déformations longitudinales sont données par la formule bien connue

$$\Lambda = \frac{R l}{E \sigma}.$$

Leur connaissance nous permettra, à l'aide d'un tracé de Williot, de déterminer la déformée de la membrure extérieure et, ainsi, les lignes d'influence cherchées de la poussée $q_{(x,y)}$. Pour obtenir ces dernières, nous devons diviser les déplacements des nœuds de la membrure extérieure par le déplacement horizontal du nœud 8_i , pris comme échelle. Or, ces déplacements seront tous donnés, ce dernier y compris, par le même tracé de Williot (fig. 19, b). L'échelle de ce tracé est donc arbitraire. Il en résulte que l'on peut calculer les déformations longitudinales Λ à un facteur constant près. C'est pour

cette raison que l'on a donné dans le Tableau X les raccourcissements des barres à un même facteur K près; le tableau renseigne seulement les nombres λ , qui sont reliés aux déformations Λ par la relation

$$\Lambda = K\lambda.$$

Le facteur K dépend notamment de l'intensité de la force $q = -1$ et du coefficient d'élasticité longitudinale E . Nous avons supposé ce dernier le même pour toutes les barres. On voit d'autre part qu'il n'est pas nécessaire de définir les unités dans lesquelles sont exprimées la poussée $q = -1$ et les forces R dans les barres dues à cette poussée.

Pour tracer le diagramme de Williot, on pourrait partir d'une des extrémités de l'arc, par exemple o_i , et supposer tout d'abord que le montant $\bar{o}$ ne tourne pas. On arriverait finalement à l'extrémité de droite 8_i . On trouverait notamment que le nœud d'appui 8_i subit un déplacement par rapport à o_i , déplacement qui, outre une composante horizontale, posséderait une composante verticale. Or, en fin de compte, ce nœud 8_i ne peut que se déplacer sur son plan d'appui, c'est-à-dire sur l'horizontale de o_i . Il faudrait donc après coup affecter tous les déplacements fournis par le tracé de Williot ainsi construit, des corrections qui résulteraient de la rotation d'ensemble de l'arc autour de o_i nécessaire pour ramener 8_i sur son horizontale initiale.

Mais on peut éviter cette correction en profitant de la symétrie de l'arc et de sa sollicitation symétrique. En effet, après déformation de l'arc, le montant $\bar{4}$ est resté vertical. Il n'a donc subi qu'une translation horizontale par rapport à la rotule fixe o_i . On tracera donc le diagramme de Williot comme suit, en partant du montant $\bar{4}$.

On prend un point arbitraire 4_i (*fig.* 19, *b*) comme origine provisoire du tracé de Williot. Le montant $\bar{4}$ restant vertical, le nœud 4_e ne peut se déplacer, par rapport à 4_i , que sur la verticale de celui-ci. D'autre part, le montant $\bar{4}$ subit un allongement $\lambda^{\bar{4}}$. Il se déplace donc, par rapport à 4_i , vers le haut d'une distance $\lambda^{\bar{4}}$. On obtient ainsi, dans le tracé (*fig.* 19, *b*), le point 4_e figuratif de la nouvelle position du nœud 4_e après déformation de l'arc.

Ensuite, pour obtenir la nouvelle position 5_e du nœud 5_e , on portera, en 4_e , $\lambda^{\bar{5}_e}$ parallèlement à la membrure $\bar{5}_e$ et, en 4_i , $\lambda^{\bar{5}_d}$ parallèlement à la diagonale $\bar{5}_d$. $\lambda^{\bar{5}_e}$ est un raccourcissement. Il doit être porté dans le sens $\overrightarrow{5_e 4_e}$ du déplacement du nœud 5_e vers le nœud 4_e . Au con-

traire, $\lambda^{\bar{5}_e}$ est un allongement et devra être porté dans le sens $\overrightarrow{4_i 5_e}$. Si l'on élève, aux extrémités des segments $\lambda^{\bar{5}_e}$ et $\lambda^{\bar{5}_i}$, les normales à ceux-ci, on obtient, à la rencontre de ces dernières, le point 5_e du tracé de Williot. Le déplacement du nœud 5_e par rapport au nœud 4_i est mesuré, dans le diagramme, par le vecteur $\overrightarrow{4_i 5_e}$ en direction, sens et en grandeur à l'échelle du tracé.

On obtiendra de la même manière le point 5_i en portant $\lambda^{\bar{5}_i}$ en 4_i et $\lambda^{\bar{5}_e}$ en 4_e et en élevant les normales aux extrémités de ces segments.

On continuera aisément la construction du tracé de Williot jusqu'à l'extrémité 8_e et 8_i de l'arc.

Cette disposition particulière du tracé présente un second avantage : il n'est pas nécessaire de tracer la partie correspondant à la moitié de gauche de l'arc, car cette partie est symétrique de celle correspondant à la moitié de droite que nous venons de tracer. Nous avons représenté l'axe de symétrie en trait d'axes. Cet axe est la verticale des points 4_i et 4_e .

En particulier, le point o_i du tracé complet de Williot se trouve sur l'horizontale du point 8_i et est symétrique de celui-ci par rapport à l'axe de symétrie. Le nœud o_i étant supposé fixé, ne subit aucun déplacement. On prendra donc le point o_i du tracé de Williot comme origine de celui-ci. Dès lors, si l'on a préalablement projeté les points $5_e, 5_i, 6_e, 6_i, 7_e, 7_i, 8_e$ et 8_i horizontalement jusqu'à l'axe de symétrie en $5'_e, 5'_i, 6'_e, 6'_i, 7'_e, 7'_i, 8'_e$ et $8'_i$, les composantes verticales des déplacements des nœuds $o_i, o_e, 1_e, 2_e, 3_e, 4_e, 5_e, 6_e, 7_e, 8_e$ et 8_i , par rapport à o_i , seront donnés respectivement comme suit en fonction des segments mesurés sur le diagramme de Williot. Composantes verticales vers le bas (> 0)

$$0, \overline{8'_i 8'_e}, \overline{8'_i 7'_e}, \overline{8'_i 6'_e}, \overline{8'_i 5'_e}, \overline{8'_i 4'_e}, \overline{8'_i 3'_e}, \overline{8'_i 2'_e}, \overline{8'_i 1'_e}, \overline{8'_i 0'_e}, \text{ et } 0.$$

Composantes horizontales vers la droite (> 0)

$$0, h^{8_i} - h^{8_e}, h^{8_i} - h^{7_e}, h^{8_i} - h^{6_e}, h^{8_i} + h^{5_e}, h^{8_i}, h^{8_i} - h^{5_e}, \\ h^{8_i} + h^{6_e}, h^{8_i} + h^{7_e}, h^{8_i} + h^{8_e} \text{ et } 2h^{8_i},$$

les h étant pris en valeur absolue et représentant les segments $\overline{8'_i 8'_e}$, etc.

On déduirait de même du tracé de Williot les composantes verticales et horizontales des déplacements des nœuds de la membrure intérieure.

Nous avons consigné ces composantes dans le Tableau XI, à la même échelle que celle des λ , ce qui n'est cependant pas indispensable. On voit que les composantes verticales sont symétriques, tandis que les composantes horizontales sont symétriques à la constante h^{8i} près, dans les deux moitiés de l'arc.

TABLEAU XI. — *Résultats du tracé de Williot de la figure 19 (b).*
Composantes verticales vers le bas et horizontales vers la droite, des déplacements

Composantes.	0_i	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e	8_i
<i>Membrure extérieure.</i>											
Verticales.....	0	2,2	96,1	188,0	255,2	278,0	255,2	188,0	96,1	2,2	0
Horizontales.....	0	102,8	213,5	271,25	287,9	279,3	270,7	287,35	345,1	455,8	558,6

Composantes.	0_i	1_i	2_i	3_i	4_i	5_i	6_i	7_i	8_i
<i>Membrure intérieure.</i>									
Verticales.....	0	97,5	190,4	257,7	280,9	257,7	190,4	97,5	0
Horizontales.....	0	135,4	216,9	258,3	279,3	300,3	341,7	423,2	558,6

Ces déplacements sont tous positifs. Si on les mesure à l'échelle $2h^{8i} = 558,6$ du déplacement horizontal du nœud 8_i , on obtiendra les valeurs successives des lignes d'influence $q_{(x,y)}$ de la poussée de l'arc, pour les forces extérieures verticales et horizontales et pour les deux cas où ces forces sont appliquées aux nœuds de la membrane extérieure ou de la membrane intérieure. Les résultats sont consignés dans le Tableau XII.

Nous n'avons reporté sur les figures 20 (*b* et *c*) que les lignes d'influence dans le cas où les forces sont appliquées à la membrane extérieure (et sur les montants d'extrémités pour les forces horizontales). Ces figures font ressortir la symétrie propre des lignes d'influence.

TABLEAU XII. — Lignes d'influence exactes de la poussée $q_{(x,y)}$.

$r_e =$	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
Forces verticales.....	0,006.0	0,172.0	0,336.6	0,456.9	0,497.7	0,456.9	0,336.6	0,172.0	0,006.0
Forces horizontales.....	0,184.0	0,382.2	0,485.6	0,515.4	0,500.0	0,484.6	0,514.4	0,617.8	0,816.0
$r_i =$	0_i	1_i	2_i	3_i	4_i	5_i	6_i	7_i	8_i
Forces verticales.....	0	0,174.5	0,340.9	0,461.3	0,502.9	0,461.3	0,340.9	0,174.5	0
Forces horizontales.....	0	0,242.4	0,388.3	0,462.4	0,500.0	0,537.6	0,611.7	0,757.6	1

a. — Forces appliquées aux nœuds de la membrure extérieure.

b. — Forces appliquées aux nœuds de la membrure intérieure.

e. Remarque importante. — Il est intéressant d'attirer l'attention sur les propriétés particulières que revêt le tracé de Williot lorsqu'on l'applique aux systèmes à barres surabondantes.

Ainsi, dans le tracé de la figure 19 (*b*), on a obtenu les points 5_e et 5_i indépendamment l'un de l'autre. Or, leur position relative doit être telle que la composante verticale $\overline{5_e 5_i}$ du déplacement relatif des nœuds 5_e et 5_i soit égale à la déformation longitudinale du montant 5 . Il en sera de même des positions relatives, dans le tracé de Williot, des points 6_e et 6_i , 7_e et 7_i , 8_e et 8_i . On voit donc que, dans le cas des systèmes à barres surabondantes, le tracé de Williot doit répondre à autant de vérifications qu'il y a de barres surabondantes.

Nous avons donné dans le Tableau XIII ci-après : dans la ligne *a*,

TABLEAU XIII. — *Erreurs relatives, en pour 100, du diagramme de Williot (fig. 19 b).*

MONTANTS	5	6	7	8
<i>a</i>	10,6	4,9	13,7	33,9
<i>b</i>	0,043	0,022	0,040	0,202
<i>c</i>	0,094	0,065	0,229	33,9

les erreurs relatives du diagramme de Williot par rapport aux déformations mêmes des montants 5, 6, 7 ou 8 considérés; dans la ligne *b*, les erreurs relatives par rapport à l'échelle de la déformée (déplacement $2h^i$) et, dans la ligne *c*, les erreurs relatives sur les ordonnées des lignes d'influence de la poussée (pour des forces verticales appliquées à la membrure extérieure ou à la membrure intérieure) au droit du montant considéré. On constate que les erreurs relatives sur les déformations des montants sont élevées, mais elles n'ont aucune importance. Les erreurs relatives par rapport à l'échelle de la déformée, donnée par le tracé de Williot, sont les seuls critères de la précision de ce tracé. On voit qu'elles sont très faibles. Il en est de même des erreurs relatives sur les ordonnées des lignes d'influence, qui sont, en fin de compte, les seules intéressantes. L'erreur

sur les ordonnées de la ligne d'influence au droit du montant 8 est grande, mais elle se rapporte à des ordonnées excessivement petites. Elle ne présente donc aucun danger.

3. Calcul des lignes d'influence des barres des membrures et des diagonales, dans l'arc rendu isostatique intérieurement et extérieurement (*fig. 14, e*). — Nous sommes actuellement en possession des lignes d'influence de tous les éléments hyperstatiques de l'arc, c'est-à-dire des éléments hyperstatiques intérieurs, les montants 1 à 8, et de l'élément hyperstatique extérieur, la poussée q . Nous allons à présent calculer celles des autres barres, les membrures et les diagonales, dans l'arc rendu isostatique intérieurement et extérieurement par suppression de tous les éléments hyperstatiques. Il s'agit, en résumé, d'étudier la sollicitation de l'arc de la figure 14(*e*).

Cet arc étant isostatique intérieurement et extérieurement, les lignes d'influence se détermineront en appliquant le principe des travaux virtuels comme il a été indiqué au Chapitre I(1, *e*).

Soit par exemple à déterminer la ligne d'influence de la membrure $\bar{7}_e$. On coupera cette barre, on produira un rapprochement $\Delta\bar{7}_e$ de ses nœuds d'extrémités et l'on recherchera, à l'aide d'un tracé de Williot, la déformée de l'arc qui en résulte. Les projections verticale et horizontale de cette déformée mesurées à l'échelle $\Delta\bar{7}_e$, ne sont autres que les lignes d'influence de la barre $\bar{7}_e$ dans l'arc rendu isostatique, pour des forces verticales et horizontales. Ces diverses opérations ont été effectuées dans les figures 21 (*a, b, c, d*).

L'arc rendu isostatique est représenté par la figure 21(*a*) dans laquelle *les montants sont supposés inexistants*. Si l'on coupe la membrure $\bar{7}_e$, le système devient déformable. Il comporte notamment un tronçon ($0_i 0_e 6_e 6_i 7_i$) indéformable, que l'on a hachuré sur le dessin, et un tronçon ($7_e 8_e 8_i$) déformable.

Cela étant, on produit un rapprochement $\Delta\bar{7}_e$ des nœuds 7_e et 6_e que l'on prend comme unité de mesure du tracé de Williot (*fig. 21, d*). Pour construire ce dernier, on procédera comme suit. On le trace dans l'hypothèse où le tronçon indéformable hachuré est fixé, quitte à faire après coup les corrections nécessaires. Dès lors, après déformation de l'arc due à $\Delta\bar{7}_e$, les points du tracé de Williot figuratifs des positions finales des nœuds ($0_e 0_i, \dots, 6_e 6_i 7_e$) de ce tronçon restent

confondus avec l'origine du tracé. Nous n'avons noté sur la figure (*d*) que les points ($o_e o_i 6_e 6_i 7_e$) correspondant aux nœuds d'extrémités du tronçon indéformable et, pour rappeler qu'il s'agit de ce dernier, nous avons souligné d'un trait les notations en question.

Notons d'abord que le tracé de Williot revêt, dans le cas des systèmes isostatiques, une forme très simple, car les déformations longitudinales des barres, dues au rapprochement $\Delta^{\bar{e}}$, sont toutes nulles. Il suffit donc, pour obtenir les différents points du tracé, d'élever comme suit une succession de perpendiculaires aux directions des différentes barres.

Pour obtenir le point 7_e du tracé de Williot, on porte, à partir du point $6_e \equiv o_i$ de celui-ci (origine), $\Delta^{\bar{e}}$ parallèle à la barre $\bar{7}_e$ et égal à l'unité choisie pour les lignes d'influence. *Ce segment doit être porté dans le sens du déplacement du nœud 7_e par rapport au nœud 6_e .* Si l'on élève, à l'extrémité de ce segment, une normale à $\bar{7}_e$ et, par le point 6_i (origine) une normale à $\bar{7}_d$, l'intersection de ces deux normales donne le point 7_e . De même, une normale en 7_e à $\bar{8}_g$ et une autre en 7_i à $\bar{8}_i$ donnent à leur rencontre le point 8_i . Enfin, 8_e se trouve à la rencontre des droites $\bar{7}_e 8_e$ et $\bar{7}_i 8_e$ normales respectivement à $\bar{8}_e$ et à $\bar{8}_d$. Les déplacements des différents nœuds $o_e, 1_e, \dots, 8_e, 8_i$, sont représentés en grandeur, direction et sens dans le tracé de Williot et, à l'échelle $\Delta^{\bar{e}} = 1$ de celui-ci, par les segments $\overrightarrow{o_i o_e}, \dots, \overrightarrow{o_i 7_e}, \overrightarrow{o_i 8_e}$ et $\overrightarrow{o_i 8_i}$. En particulier, le nœud 8_i s'est donc soulevé de son plan d'appui. Il en résulte que le tracé de Williot doit subir des corrections correspondant à la rotation d'ensemble de la ferme autour de la rotule o_i nécessaire pour ramener 8_i sur son plan d'appui.

Si l'on fait tout d'abord abstraction de ces corrections et si l'on projette horizontalement les points $o_i, o_e, 1_e, \dots, 8_e$ et 8_i du tracé (*d*) jusqu'aux verticales respectives des nœuds correspondants de l'arc, on obtiendra en ($o''_i o''_e \dots 6''_e 7''_e 8''_e 8''_i$) une ligne brisée qui, rapportée à l'horizontale $o''_i a$ de o_i , représentera la ligne d'influence non corrigée de la barre $\bar{7}_e$ pour le cas des forces verticales. Elle est négative car ses ordonnées sont toutes dirigées vers le haut, en sens inverse du sens positif des forces extérieures. Les corrections de cette ligne d'influence dues à la rotation d'ensemble ω de l'arc sont, en un nœud

quelconque d'abscisse x , égales à

$$\omega x = \overline{a 8_i''} \frac{x}{40}, \quad \text{car} \quad \omega = \frac{\overline{a 8_i''}}{40}.$$

où $\overline{a 8_i''}$ est le soulèvement de 8_i au-dessus de son plan d'appui (*fig. 21, b*) et 40 la portée, en mètres, de l'arc, x étant également mesuré en mètres. Les corrections sont donc représentées par les ordonnées de la droite $\overline{o_i'' 8_i''}$ mesurées à partir de l'horizontale $\overline{o_i'' a}$. Elles sont positives car elles correspondent à des déplacements vers le bas, dans le sens des forces extérieures. Elles doivent donc être ajoutées aux ordonnées de la ligne d'influence non corrigée, qui sont négatives. Cela revient à transporter l'axe de référence de $\overline{o_i'' a}$ en $\overline{o_i' 8_i''}$ et de mesurer *verticalement, par rapport à cet axe*, les ordonnées de la ligne brisée ($o_i'' o_e'', \dots, 8_e'' 8_i''$). Ces ordonnées sont toutes dirigées vers le bas, donc toutes positives.

Cette propriété peut d'ailleurs se trouver directement. En effet, la droite $\overline{o_i' 8_i''}$ n'est autre que la droite figurative de la position de la ligne des appuis, après déformation de l'arc. Si l'on rapporte à cette nouvelle position la déformée *verticale* de l'arc, on aura la ligne d'influence cherchée. C'est ce qu'exprime la propriété précédente.

Il est cependant plus commode de rapporter la ligne d'influence à un axe de référence horizontal. C'est pourquoi nous avons opéré comme suit. Si l'on relève la ligne d'influence par un mouvement de rotation autour de $8_i''$ de manière à amener l'axe de référence en $o_i' 8_i'$ sur l'horizontale de $8_i''$, on obtiendra en ($o_i' o_e' \dots 6_e' 7_e' 8_e' 8_i'$), tracée en traits pleins, la ligne d'influence rapportée à l'axe de référence horizontal $o_i' 8_i'$ tracé en traits d'axes. Cette rotation correspond à une rotation d'ensemble de l'arc autour du nœud 8_i supposé fixe. Cette rotation est égale à ω et a donc pour effet de ramener o_i sur l'horizontale de 8_i . Elle est équivalente à la rotation nécessaire pour corriger le tracé de Williot.

Le nouveau tracé de la ligne d'influence s'obtient d'ailleurs très aisément en projetant les points du tracé de Williot, d'abord horizontalement jusqu'à la verticale du nœud 8_i , puis parallèlement à la droite $o_i' a$ jusqu'à l'aplomb des nœuds correspondants de l'arc.

Quant à la ligne d'influence de la membrure $\overline{7_e}$ pour le cas des forces horizontales, on la construira d'une manière en tous points analogue. Si l'on fait tout d'abord abstraction de la rotation d'en-

semble de l'arc, il suffit de rapporter la ligne d'influence à la verticale du point o_i du tracé de Williot, c'est-à-dire à la verticale $o'_i y$ de la figure 21(c). Le procédé reviendrait donc à projeter *verticalement* les points du tracé (d) jusqu'aux niveaux des nœuds correspondants de l'arc.

D'autre part, la rotation d'ensemble ω de l'arc produit des corrections

$$\omega y = \overline{a s_i^n} \frac{y}{40}$$

des lignes d'influence pour des forces horizontales, où y est l'ordonnée, en mètres, d'un nœud quelconque de l'arc. Ces corrections sont donc proportionnelles à y . La rotation ω a lieu dans le sens de celle des aiguilles d'une montre. Elle produit donc, aux différents nœuds de l'arc, des déplacements horizontaux vers la droite, c'est-à-dire dans le sens positif des forces extérieures horizontales. Les corrections dues à ω sont donc positives. Pour en tenir compte automatiquement, *sans devoir corriger le tracé de Williot*, on opérera comme suit. On portera horizontalement, sur la figure (b), une abscisse $\overline{y_{i_e}}$ égale à l'ordonnée du nœud 4_e , on mesurera, à cette abscisse, le segment vertical Y_{τ_e} intercepté par les droites $\overline{o'_i 8'_i}$ et $\overline{o'_i a}$, on portera ensuite ce segment dans la figure (c) sur l'horizontale du nœud 4_e et à partir de l'axe de référence $\overline{o'_i y}$. On obtiendra ainsi le point 4. Les points de la ligne d'influence de la membrure $\overline{\tau_e}$, pour le cas des forces horizontales, se trouveront dès lors très aisément en o'_i , o'_e , ..., $4'_e$, ..., $8'_e$ et $8'_i$ en projetant les points o_i , o_e , ..., 4_e , ..., 8_e et 8_i du tracé de Williot, d'abord verticalement jusque l'horizontale du nœud o_i et ensuite parallèlement à la droite $\overline{o'_i 4}$ jusqu'au niveau des nœuds correspondants de l'arc. Cette ligne d'influence corrigée est de nouveau rapportée à l'axe de référence $\overline{o'_i y}$.

On voit que la méthode précédente d'obtention des lignes d'influence pour des charges verticales et pour des forces horizontales est très simple et a l'avantage d'éviter la correction du tracé de Williot. Cette méthode est entièrement graphique. Elle ne nécessite donc pas de combinaison de calculs mixtes, analytiques et graphiques, qui demandent toujours plus de temps que des calculs entièrement graphiques et sont moins précis à cause des erreurs de mesure et de report.

Le procédé de détermination des lignes d'influence des barres $\bar{\gamma}_i$, $\bar{\gamma}_d$ et $\bar{\gamma}_g$ est semblable au précédent. Il est renseigné par les mêmes notations et les mêmes types de traits dans les figures 22 et 23. En particulier, les tronçons de gauche de l'arc qui restent indéformables sont hachurés sur les figures (α) de l'arc.

Nous nous sommes borné au tracé des lignes d'influence des membrures et des diagonales d'un seul panneau. Elles rendent compte suffisamment à elles seules, de l'allure des lignes d'influence des divers types de barres de l'arc. Celles des autres barres s'obtiendraient d'ailleurs d'une manière tout à fait analogue.

Nous possédons actuellement les lignes d'influence des montants surabondants, dans l'arc rendu isostatique extérieurement, celles de la poussée (*fig. 14, d*) et celles des membrures et des diagonales dans l'arc rendu entièrement isostatique (*fig. 14, f*). Il reste, pour obtenir les lignes d'influence dans l'arc biarticulé, à faire les corrections de ces dernières dues aux effets des montants surabondants et de la poussée, ainsi que les corrections de celles des montants dues à la poussée.

Nous effectuerons ces corrections en deux stades : tout d'abord celles des lignes d'influence des membrures et des diagonales dues aux effets des montants ; ensuite, celles des membrures, des diagonales et des montants dues aux effets de la poussée. Tous ces effets sont d'ailleurs variables avec la position de la force extérieure unitaire mobile, verticale ou horizontale. Ils doivent être évalués à l'aide des lignes d'influence des montants et de la poussée.

4. Calcul des corrections, dues aux montants, des lignes d'influence des membrures et des diagonales trouvées pour l'arc rendu entièrement isostatique. Lignes d'influence exactes dans l'arc rendu seulement isostatique extérieurement. — Il s'agit de la sollicitation de la figure 14 (*f*). Soit par exemple à déterminer les corrections des lignes d'influence des barres $\bar{\gamma}_e$, $\bar{\gamma}_i$, $\bar{\gamma}_g$ et $\bar{\gamma}_d$ du panneau $\bar{\gamma}$. Si l'on fait une coupe dans ce panneau, on voit que les efforts normaux dans ses barres sont uniquement fonctions des efforts normaux dans les montants $\bar{\delta}$ et $\bar{\gamma}$ qui se trouvent à sa droite. En vue d'établir les corrections, nous calculerons donc au préalable les efforts normaux développés dans les barres $\bar{\gamma}_e$, $\bar{\gamma}_i$, $\bar{\gamma}_g$ et $\bar{\gamma}_d$ par une compression

interne *unitaire* du montant $\bar{8}$ et ceux développés dans les mêmes barres par une compression interne *unitaire* du montant $\bar{7}$. Ces efforts sont, somme toute, des *coefficients d'influence*, que nous désignerons par exemple sous la forme $\alpha_{\bar{7}e; i, g, d}^{\bar{8}}$ et $\alpha_{\bar{7}e; i, g, d}^{\bar{7}}$, $\alpha_{\bar{7}}^{\bar{8}}$, par exemple, représentant le coefficient d'influence du montant $\bar{8}$ sur la membrure $\bar{7}_e$.

Cela étant, ces coefficients d'influence peuvent s'obtenir de trois manières :

a. Ils peuvent être déduits directement des tracés de Williot (fig. 21, d; 22, d et g; 23, d) déjà construits lors de la détermination des lignes d'influence des barres $\bar{7}_e$, $\bar{7}_i$, $\bar{7}_g$ et $\bar{7}_d$ dans l'arc rendu entièrement isostatique.

En effet, l'influence individuelle d'une compression *unitaire* du montant $\bar{8}$, sur la barre $\bar{7}_e$ par exemple, est égale à l'influence, sur la même barre, de deux forces unitaires de compression des nœuds 8_e et 8_i d'extrémités du montant $\bar{8}$ dans l'arc dépourvu de montants. Or, ces forces unitaires aux nœuds sont verticales et sont, l'une en 8_e dirigée vers le haut, donc négative, l'autre en 8_i dirigée vers le bas, donc positive. Le coefficient d'influence n'est donc autre que la différence des ordonnées en 8_i et 8_e des lignes d'influence de la barre $\bar{7}_e$ pour des charges verticales appliquées à la membrure intérieure et à la membrure extérieure. Plus simplement, ce coefficient d'influence peut être mesuré directement sur le tracé de Williot (fig. 21, d) comme différence entre les déplacements verticaux des nœuds 8_i et 8_e , cette différence étant mesurée positivement vers le bas et à l'échelle $\Delta_{\bar{7}_e}^{\bar{8}} = 1$ du tracé. Dans le cas actuel, $\alpha_{\bar{7}_e}^{\bar{8}}$, désigné sur la figure 21 (d) est donc négatif. Dans le cas actuel, il n'est pas nécessaire de tenir compte de la correction du tracé de Williot due à la rotation d'ensemble de l'arc, car cette correction est la même aux deux nœuds 8_i et 8_e et s'élimine donc dans la différence. Dans le cas général où les montants ne sont pas verticaux, $\alpha_{\bar{7}_e}^{\bar{8}}$ serait mesuré par la composante du déplacement relatif des nœuds 8_e et 8_i parallèle au montant $\bar{8}$, positivement dans le sens d'un écartement de ces nœuds, ce déplacement étant pris dans le tracé de Williot corrigé. Cette correction peut s'obtenir très simplement, comme nous avons vu dans le Chapitre I.

On obtiendra de même les coefficients d'influence $\alpha_{\tau_{i;d,g}}^{\bar{s}}$ et $\alpha_{\tau_{ei;d,g}}^{\bar{t}}$ sur les tracés de Williot des figures 21 (d); 22 (d et g) et 23 (d).

b. On peut les obtenir à l'aide d'un tracé de Cremona. — On tracera d'abord (*fig.* 18, c) en ($v \equiv u, a, b, c, d, e, g, h$) l'épure de Cremona, en traits pleins, correspondant à deux compressions *unitaires* des nœuds 8_e et 8_i agissant seules. Cette épure donnera en $\overrightarrow{ug}$, $\overrightarrow{ge}$, $\overrightarrow{eh}$ et $\overrightarrow{hv}$ les coefficients d'influence respectifs $\alpha_{\tau_{ei;d,g}}^{\bar{s}}$ en grandeurs et en signes.

De même, on pourra greffer sur la même épure un second tracé de Cremona ($v' \equiv u', g', e', h'$) [en traits interrompus sur la figure 18 (c)] correspondant à deux compressions *unitaires* des nœuds 7_e et 7_i agissant seules. A noter que, du fait de cette sollicitation particulière, les barres du panneau 8 ne subissent aucun effet. Ce deuxième tracé de Cremona fournit en $\overrightarrow{u'g'}$, $\overrightarrow{g'e'}$, $\overrightarrow{e'h'}$ et $\overrightarrow{h'v'}$ les coefficients d'influence respectifs $\alpha_{\tau_{ei;d,g}}^{\bar{t}}$ en grandeurs et en signes.

c. Ils peuvent être obtenus analytiquement. — Nous avons vu, dans le Chapitre II (*fig.* 7, c), que si l'on développe des efforts unitaires en r_i et en r_e , le panneau r réagit sur le panneau ($r-1$), en $\overline{r-1}_e$ et $\overline{r-1}_i$, avec des efforts $\frac{1}{\pi_r}$ dirigés suivant le montant ($r-1$) et de sens relatif opposé à celui des efforts unitaires en r_i et r_e . Si ces derniers sont attractifs, les forces $\frac{1}{\pi_r}$ en $\overline{r-1}_e$ et $\overline{r-1}_i$ sont répulsives. Inversément, si les premiers sont répulsifs, les seconds sont attractifs. Cette propriété est indépendante de l'existence ou non du montant $\overline{r-1}$. Elle est donc vraie aussi dans le cas où l'on a supprimé tous les montants surabondants de la ferme. Pour les barres du panneau $r-1$ et des panneaux à gauche de celui-ci, on peut donc remplacer la sollicitation de la figure 24 (a), par celle de la figure 24 (b).

S'il s'agit par exemple de déterminer les coefficients d'influence du montant r sur les barres du panneau $\overline{r-1}$, il résulte de ce qui précède qu'ils sont égaux à ceux du montant $\overline{r-1}$ sur ces mêmes barres (*fig.* 24, c) multipliés par le facteur $\left(-\frac{1}{\pi_r}\right)$, où π_r a été déter-

miné précédemment au cours du calcul des symboles généraux (A). Or, les coefficients d'influence d'un montant quelconque $\bar{k}$ sur les barres du panneau k à sa gauche se déterminent très aisément, soit par une décomposition graphique simple, soit en écrivant les équations d'équilibre aux nœuds k_e et k_i . Les coefficients ainsi trouvés ne sont d'ailleurs autres que les efforts $\mathcal{F}$ [formules (2')] changés de signe et où l'on remplace l'indice r par l'indice k .

Si, au contraire, il s'agit de déterminer les coefficients d'influence du montant r sur les barres du panneau $\overline{r-2}$, il suffira de continuer l'application de la propriété précédente (*fig. 24*) au delà du panneau $(r-1)$. Les coefficients d'influence cherchés ne sont autres que ceux du montant $\overline{r-2}$ sur les barres du panneau $(r-2)$ immédiatement à sa gauche, multipliés par

$$\left(-\frac{1}{\pi_r}\right)\left(-\frac{1}{\pi_{r-1}}\right) = \frac{1}{\pi_r \pi_{r-1}}.$$

Par ce procédé, on pourra déterminer aisément et *progressivement* les coefficients d'influence d'un montant quelconque dans toutes les membrures et les diagonales qui se trouvent à sa gauche.

Dans le cas particulier actuel, nous avons trouvé [formules (A')] que les symboles π sont tous égaux à l'unité. Par conséquent, d'après ce qui précède, les coefficients d'influence du montant $\bar{8}$ sur les barres du panneau 7 sont égaux et opposés à ceux du montant $\bar{7}$ sur les barres du même panneau. D'autre part, ces coefficients d'influence sont, d'après les formules (2') où l'on tient compte des simplifications $g_r = e_r = \frac{l_{rg}}{2}$ et $h_r = f_r = \frac{l_{rd}}{2}$

$$\alpha_{7ei}^{\bar{8}} = -\alpha_{7ei}^{\bar{7}} = -\frac{l_c = l_i}{l} = -1,507.187,$$

$$\alpha_{7d}^{\bar{8}} = -\alpha_{7d}^{\bar{7}} = +\frac{l_{7d}}{l} = +1,198.573$$

et

$$\alpha_{7g}^{\bar{8}} = -\alpha_{7g}^{\bar{7}} = +\frac{l_{7g}}{l} = +2,259.789.$$

Les coefficients d'influence des montants sur les membrures sont, en valeur absolue, constants pour toutes les membrures extérieures et intérieures de l'arc, car l_i et l sont constants. Quant aux coefficients d'in-

fluence des montants sur les diagonales, ils sont égaux à $l_g : l$ ou $l_d : l$. Or, les valeurs de ces rapports sont déjà calculées et renseignées dans le Tableau I. L'obtention de tous les coefficients est donc immédiate. Quant à leurs signes, ils sont alternativement positifs et négatifs dans les panneaux successifs et opposés pour les membrures et les diagonales d'un même panneau.

D'autre part, pour les barres d'un panneau quelconque, les coefficients d'influence de tous les montants à droite de ce panneau sont, pour une même barre, égaux en valeur absolue, pour les diagonales comme pour les membrures. Il en résulte que l'on pourra déterminer comme suit les corrections des lignes d'influence des membrures et des diagonales, dues aux lignes d'influence des montants surabondants. Dans un tableau spécial, on écrira une ligne contenant les valeurs de la ligne d'influence Q_x^8 , puis une ligne des valeurs $Q_x^8 - Q_x^7$, ensuite, une ligne des valeurs $Q_x^8 - Q_x^7 + Q_x^6$, et ainsi de suite. On construira de même un tableau formé des lignes successives R_y^8 , $R_y^8 - R_y^7$, $R_y^8 - R_y^7 + R_y^6$,.... Ces lignes s'obtiennent très aisément l'une quelconque à partir de la précédente, surtout si l'on fait usage d'une machine à calculer.... Ces tableaux étant établis, les corrections des lignes d'influence des barres *du panneau 8* s'obtiendront, dans le cas des forces verticales, en multipliant la ligne Q_x^8 par les coefficients d'influence respectifs des barres considérées. Pour la barre $\bar{8}_e$, par exemple, on multipliera la ligne Q_x^8 par le coefficient constant $\alpha_{8_e}^8$. On opérera de même dans le cas des forces horizontales.

Quant aux corrections des lignes d'influence des barres du panneau 7, elles s'obtiendront, pour les forces verticales, en multipliant la ligne $(Q_x^8 - Q_x^7)$ par les coefficients d'influence du montant $\bar{8}$ sur les barres considérées. Il en sera de même pour le cas des forces horizontales. Ces corrections ont donc pour expressions

$$-1,507.187 (Q_x^8 - Q_x^7), \quad +2,259.789 (Q_x^8 - Q_x^7), \quad +1,198.573 (Q_x^8 - Q_x^7),$$

respectivement pour les barres 7_e et i , 7_g , 7_d et pour le cas des charges verticales;

$$-1.507.187 (R_y^8 - R_y^7), \quad +2.259.789 (R_y^8 - R_y^7), \quad +1,198.573 (R_y^8 - R_y^7),$$

respectivement pour les barres 7_e et i , 7_g , 7_d et pour le cas des forces horizontales.

TABLEAU XIV. — Corrections des lignes d'influence des membrures et des diagonales ($7_c, 7_i, 7_g$ et 7_d) dues aux lignes d'influence des montants surabondants (Q_1^7 et Q_{23}^8, R_1^7 et R_2^8).

$r_{e,i} =$		0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
<i>a. — Cas des charges verticales. Corrections dues à $Q_{23}^8, Q_1^7, \dots$</i>										
$Q_{23}^8 - Q_1^7$	0	0,078.839	0,181.583	0,301.230	0,429.690	0,557.304	0,697.549	0,443.331	0,998.314	
Barres 7_c et 7_i	0	-0,118.825	-0,273.680	-0,454.010	-0,647.623	-0,839.961	1,051.337	-0,668.183	-1,504.646	
» 7_g	0	0,178.160	0,410.339	0,680.716	0,971.009	1,259.389	1,576.314	1,001.835	2,255.979	
» 7_d	0	0,094.494	0,217.640	0,361.046	0,515.015	0,667.970	0,836.063	0,531.365	1,196.552	
$r_{e,i} =$		0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
<i>b. — Cas des forces horizontales. Corrections dues à $R_1^8, R_2^7, \dots$</i>										
$R_1^8 - R_2^7$	0	0,085.927	0,188.672	0,267.511	0,317.069	0,333.987	0,317.082	0,261.836	0,364.703	1,395.570
7_c et 7_i	0	-0,129.508	-0,284.364	-0,403.189	-0,477.882	-0,503.381	-0,477.902	-0,394.636	-0,549.676	-2,103.385
7_g	0	0,194.177	0,426.359	0,604.518	0,716.509	0,754.740	0,716.538	0,501.694	0,824.152	3,153.694
7_d	0	0,102.990	0,226.137	0,320.631	0,380.030	0,400.308	0,380.046	0,313.830	0,437.123	+1,672.693

On opérera ainsi de suite jusqu'au panneau 5 inclus. Il suffit en effet de tracer les lignes d'influence de la moitié de droite de l'arc, celui-ci étant symétrique, dans le cas où il est biarticulé.

Nous nous sommes borné à corriger les lignes d'influence des barres $\bar{\gamma}_e$, $\bar{\gamma}_i$, $\bar{\gamma}_d$, $\bar{\gamma}_g$, les seules que nous ayons tracées au paragraphe précédent. Le calcul de ces corrections est consigné au Tableau XIV.

Si l'on affecte de ces corrections les lignes d'influence des membrures et des diagonales dans l'arc rendu entièrement isostatique (*fig.* 21, 22 et 23), on obtient les lignes d'influence des barres $\bar{\gamma}_e$, $\bar{\gamma}_i$, $\bar{\gamma}_d$ et $\bar{\gamma}_g$ dans l'arc hyperstatique intérieurement, rendu seulement isostatique extérieurement par substitution à la rotule de droite d'un appui simple sur plan horizontal. Ces lignes d'influence sont tracées en traits long interrompus sur les figures 21, 22 et 23.

Remarque. — Notons que les trois modes précédents de détermination des coefficients d'influence conduisent évidemment aux mêmes résultats. Les erreurs relatives des procédés (a) et (b), qui sont graphiques, par rapport au procédé analytique, qui est rigoureux, ne dépassent pas 1 pour 100.

5. Corrections, dues à la poussée, des lignes d'influence des montants, des membrures et des diagonales de l'arc rendu isostatique extérieurement (*fig.* 14, d). Lignes d'influence définitives dans l'arc biarticulé. — Les lignes d'influence de toutes les barres étant connues dans le cas de la ferme rendue isostatique extérieurement, il suffit, pour obtenir les lignes d'influence définitives, c'est-à-dire celles de l'arc *biarticulé*, d'affecter les premières, des corrections dues aux lignes d'influence de la poussée (*fig.* 14, d).

A cette fin, il suffit de déterminer à l'avance les efforts internes développés dans les membrures, les diagonales et les montants par une poussée $q = +1$. Or, ces efforts, qui sont en quelque sorte des coefficients d'influence, sont égaux et opposés à ceux qui ont été établis à l'aide du tracé de Cremona de la figure 18(b) lors du calcul des lignes d'influence de la poussée. Ils sont donc égaux aux coefficients d'influence R, *changés de signe*, renseignés au Tableau X.

Les corrections cherchées seront donc immédiates. Celles des ordonnées de la ligne d'influence d'une barre quelconque, membrure, diagonale ou montant, pour le cas des charges verticales, seront

égales aux ordonnées correspondantes de la ligne d'influence de la poussée q pour le même cas des charges verticales, ces ordonnées étant multipliées par le coefficient d'influence de la poussée $q = + 1$ sur la barre correspondante. Quant aux corrections de la ligne d'influence de la même barre pour le cas des forces horizontales, elles seront de même égales à la ligne d'influence de q' multipliée par le même coefficient d'influence.

Ces corrections ont été calculées au Tableau XV pour le cas des charges verticales et au Tableau XVI pour le cas des forces horizontales.

En ce qui concerne les montants, il suffira de reporter ces corrections à partir des lignes d'influence tracées en traits longs interrompus pour le cas de l'arc isostatique extérieurement (*fig.* 16 et 17). On peut aussi reporter directement les lignes d'influence définitives préalablement calculées dans le Tableau XVII en ajoutant aux Tableaux VIII et IX des lignes d'influence des montants de l'arc isostatique extérieurement les corrections respectives des Tableaux XV et XVI. Ces lignes d'influence définitives sont renseignées au Tableau XVII et tracées en traits pleins et gras sur les figures 16 et 17.

Pour le cas des charges verticales, les lignes d'influence des Tableaux VIII et XV relatives à deux montants symétriques, sont elles-mêmes symétriques. Il en sera donc de même des lignes d'influence résultantes, c'est-à-dire des lignes définitives.

Pour le cas des forces horizontales, les lignes d'influence partielles du Tableau IX ne présentent aucune symétrie ni antisymétrie, tandis que les corrections du Tableau XVI sont symétriques pour deux montants symétriques. D'autre part, les lignes d'influence définitives doivent satisfaire, dans ce cas, à la condition d'être antisymétriques pour deux montants symétriques, l'arc définitif, c'est-à-dire l'arc biarticulé, étant entièrement symétrique, intérieurement et extérieurement. On constate, à l'aide du Tableau XVII, que ces vérifications sont satisfaites jusqu'à la quatrième décimale, ce qui est précis en raison des tracés graphiques dont on s'est servi au cours du calcul.

Quant aux membrures et aux diagonales, leurs lignes d'influence définitives s'obtiendront de même en reportant les corrections renseignées aux Tableaux XV et XVI, à partir des lignes d'influence tracées pour l'arc rendu isostatique extérieurement (*fig.* 21, b , c ; 22, b , c , e , f et 23, b , c). Elles peuvent aussi se déterminer en

TABLEAU XV. — Corrections des lignes d'influence des montants surabondants, des membrures et des diagonales τ_e , τ_b , τ_g et τ_d , dues à la ligne d'influence de la poussée $q_{(x,y)}$ pour le cas des charges verticales appliquées à la membrure extérieure.

	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
$\Delta Q^0 = \Delta Q^8 = -0,995,611.q''_e \dots$	-0,006.0	-0,171.2	-0,335.1	-0,454.9	-0,495.5	-0,454.9	-0,335.1	-0,171.2	-0,006.0
$\Delta Q^1 = \Delta Q^7 = +0,399,959.q''_e \dots$	0,002.4	0,068.8	0,134.6	0,182.7	0,199.1	0,182.7	0,134.6	0,068.8	0,002.4
$\Delta Q^2 = \Delta Q^6 = +0,622,244.q''_e \dots$	0,003.7	0,107.0	0,209.4	0,284.3	0,309.7	0,284.3	0,209.4	0,107.0	0,003.7
$\Delta Q^3 = \Delta Q^5 = +0,557,317.q''_e \dots$	0,003.3	0,095.9	0,187.6	0,254.6	0,277.4	0,254.6	0,187.6	0,095.9	0,003.3
$\Delta Q^4 = +0,475,120.q''_e \dots$	0,002.9	0,081.7	0,159.9	0,217.1	0,236.5	0,217.1	0,159.9	0,081.7	0,002.9
$\Delta Q^{7e} = -2,337,0.q''_e \dots$	-0,014.0	-0,402.0	-0,786.6	-1,067.8	-1,163.1	-1,067.8	-0,786.6	-0,402.0	-0,014.0
$\Delta Q^7 = +3,10.q''_e \dots$	0,018.6	0,533.2	1,043.5	1,416.4	1,542.9	1,416.4	1,043.5	0,533.2	0,018.6
$\Delta Q^7 = -0,498.q''_e \dots$	-0,003.0	-0,085.7	-0,167.6	-0,227.5	-0,247.9	-0,227.5	-0,167.6	-0,085.7	-0,003.0
$\Delta Q^{7d} = +0,658.q''_e \dots$	0,003.9	0,113.2	0,221.5	0,300.6	0,327.5	0,300.6	0,221.5	0,113.2	0,003.9

TABLEAU XVI. — Corrections des lignes d'influence des montants surabondants, des membrures
et des diagonales τ_e, τ_i, τ_g et τ_d , dues à la ligne d'influence de la poussée $q(x, y)$ pour le cas
des forces horizontales appliquées à la membrane extérieure.

	0_i	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e	8_i
$\Delta R^0 = \Delta R^8 = -0,995.611.q_e^h \dots$	0	-0,183.2	-0,380.5	-0,483.5	-0,513.1	-0,497.8	-0,482.5	-0,512.1	-0,615.1	-0,812.4	0
$\Delta R^1 = \Delta R^7 = +0,399.959.q_e^h \dots$	0	0,073.6	0,152.9	0,194.2	0,206.1	0,200.0	0,193.8	0,205.7	0,247.1	0,326.4	0
$\Delta R^2 = \Delta R^6 = +0,622.244.q_e^h \dots$	0	0,114.5	0,237.8	0,302.2	0,320.7	0,311.1	0,301.5	0,320.1	0,384.4	0,507.8	0
$\Delta R^3 = \Delta R^5 = +0,557.317.q_e^h \dots$	0	0,102.5	0,213.0	0,270.6	0,287.2	0,278.7	0,270.1	0,286.7	0,344.3	0,454.8	0
$\Delta R^4 = +0,475.120.q_e^h \dots$	0	0,087.4	0,181.6	0,230.7	0,244.9	0,237.6	0,230.2	0,244.4	0,293.5	0,387.7	0
$\Delta R^{7e} = -2,337.0 .q_e^h \dots$	0	-0,430.0	-0,893.2	-1,134.8	-1,204.5	-1,168.5	-1,132.5	-1,202.2	-1,143.8	-1,907.0	-2,337
$\Delta R^{7i} = +3,10 .q_e^h \dots$	0	0,570.4	1,184.8	1,505.4	1,597.7	1,550.0	1,502.3	1,594.6	1,915.2	2,529.0	3,10
$\Delta R^{7g} = -0,498 .q_e^h \dots$	0	-0,091.6	-0,190.3	-0,241.8	-0,256.7	-0,249.0	-0,241.3	-0,255.2	-0,307.7	-0,406.4	-0,498
$\Delta R^{7d} = +0,658 .q_e^h \dots$	0	0,121.1	0,251.5	0,319.5	0,339.1	0,329.0	0,318.7	0,338.5	0,406.5	0,536.9	0,658

TABLEAU XVII. — Lignes d'influence définitives des montants surabondants dans l'arc biarticulé.

$r_e =$	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e		
<i>a. — Cas des charges verticales appliquées à la membrure extérieure.</i>											
Q^8	-0,006.0	-0,106.2	-0,185.4	-0,206.5	-0,141.2	+0,005.2	+0,224.6	+0,456.9	+0,956.4	Q^0	
Q^7	+0,002.4	+0,055.0	+0,102.7	+0,129.9	+0,123.7	+0,085.5	-0,003.2	+0,253.6	-0,033.6	Q^1	
Q^6	+0,003.7	+0,058.4	+0,097.4	+0,098.4	+0,045.9	-0,075.5	+0,214.9	-0,174.4	+0,005.3	Q^2	
Q^5	+0,003.3	+0,035.7	+0,048.8	+0,025.6	-0,079.7	+0,193.0	-0,151.9	-0,039.4	+0,003.2	Q^3	
Q^4	+0,002.9	+0,000.2	-0,026.7	-0,111.8	+0,268.5	-0,111.8	-0,026.7	+0,000.2	+0,002.9	Q^4	
	8_e	7_e	6_e	5_e	4_e	3_e	2_e	1_e	0_e	$= r_e$	
<i>b. — Cas des forces horizontales appliquées à la membrure extérieure.</i>											
	0_i	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e	
R^8	0	-0,112.3	-0,224.9	-0,262.9	-0,251.6	-0,222.4	-0,221.0	-0,291.8	-0,451.5	-0,943.9	0
R^7	0	+0,058.5	+0,119.8	+0,147.3	+0,150.5	+0,141.4	+0,138.2	+0,164.2	+0,046.0	+0,547.2	0
R^6	0	+0,061.5	+0,121.4	+0,137.1	+0,125.1	+0,105.3	+0,106.1	+0,034.0	+0,406.8	+0,155.3	0
R^5	0	+0,036.9	+0,068.9	+0,066.2	+0,045.6	+0,017.0	+0,022.2	+0,214.9	+0,112.0	+0,046.5	0
R^4	0	-0,001.3	-0,013.3	-0,044.7	-0,091.8	0	+0,091.8	+0,044.7	+0,013.3	+0,001.3	0
R^3	0	-0,046.5	-0,112.0	-0,214.9	-0,022.2	-0,017.0	-0,045.6	-0,066.2	-0,068.9	-0,036.9	0
R^2	0	-0,155.3	-0,406.8	-0,034.0	-0,106.1	-0,105.3	-0,125.1	-0,137.1	-0,121.4	-0,061.4	0
R^1	0	-0,547.2	-0,046.0	-0,164.2	-0,138.2	-0,141.4	-0,150.5	-0,147.3	-0,119.8	-0,058.5	0

TABLEAU XVIII. — Corrections totales des lignes d'influence des membrures
et des diagonales dues aux lignes d'influence des montants surabondants et de la poussée.

<i>a. — Cas des charges verticales appliquées à la membrure extérieure.</i>									
$r_e =$	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e
Barres 7_c	-0,014.0	-0,520.8	-1,060.3	-1,521.8	-1,810.7	-1,907.8	-1,837.9	-1,070.2	-1,518.6
» 7_l	+0,018.6	+0,414.4	+0,769.8	+0,962.4	+0,895.3	+0,576.4	-0,007.8	-0,135.0	-1,486.0
» 7_g	-0,003.0	+0,092.5	+0,242.7	+0,453.2	+0,723.1	+1,031.9	+1,408.7	+0,916.1	+2,253.0
» 7_d	+0,003.9	+0,207.7	+0,439.1	+0,661.6	+0,842.5	+0,968.6	+1,057.6	+0,644.6	+1,200.5

<i>b. — Cas des forces horizontales appliquées à la membrure extérieure.</i>											
$r_{e,i} =$	0_i	0_e	1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e	7_e	8_e	8_i
Barres 7_c	0	-0,559.5	-1,177.6	-1,538.0	-1,682.4	-1,671.9	-1,610.4	-1,596.8	-1,993.5	-1,376.0	-4,440.4
» 7_l	0	+0,440.9	+0,900.4	+1,102.2	+1,119.8	+1,046.6	+1,024.4	+1,200.0	+1,365.5	+3,060.6	+0,996.6
» 7_g	0	+0,102.6	+0,236.1	+0,362.7	+0,459.8	+0,505.7	+0,475.2	+0,335.5	+0,516.5	-1,202.5	+2,655.7
» 7_d	0	+0,224.1	+0,477.6	+0,640.1	+0,719.1	+0,729.3	+0,698.7	+0,652.3	+0,843.6	+0,114.7	+2,330.7

reportant, à partir des lignes d'influence tracées pour l'arc rendu entièrement isostatique, les corrections totales dues aux montants surabondants et à la poussée, c'est-à-dire la somme des corrections des Tableaux XIV et XV ou XIV et XVI. Ces corrections totales sont renseignées au Tableau XVIII.

Les lignes d'influence définitives, dans l'arc réel à deux rotules, ont été tracées en traits pleins et gras dans les figures 16, 17, 21, 22 et 23.

IV. — COMPARAISON SOMMAIRE DES LIGNES D'INFLUENCE EXACTES ET DES LIGNES D'INFLUENCE DANS L'ARC BIARTICULÉ.

A titre de comparaison avec les lignes d'influence rigoureuses, on a tracé, en traits courts interrompus, sur les figures 16, 17, 21, 22, 23 et 20, les lignes d'influence approchées qui ont été établies au début pour le cas des forces verticales en décomposant l'arc en deux arcs isostatiques intérieurement (*fig.* 13). Ces lignes d'influence approchées nous ont servi pour la prédétermination des sections transversales des barres. Rappelons que nous avons déterminé la ligne d'influence approchée de la poussée q en assimilant la ferme en treillis à une ferme en âme pleine et en appliquant les tables de Bresse, établies pour des arcs circulaires et de section constante. Or, les appuis de l'arc se trouvent en des nœuds de sa membrure inférieure et non sur sa fibre moyenne. De plus, les montants étant verticaux, la section et le moment d'inertie réels sont très réduits aux environs de l'appui. Si l'on tient compte, en plus, du fait que l'arc n'est pas de hauteur constante, normalement à la fibre moyenne, on conçoit que l'assimilation à un arc circulaire de section et de moment d'inertie constants paraisse assez écartée de la réalité. Or, malgré ces approximations, on voit que la ligne d'influence approchée de la poussée n'est pas très écartée de la ligne d'influence exacte (*fig.* 20, *b*). L'erreur maximum sur les ordonnées atteint 8 pour 100, par excès. L'erreur sur la surface de la ligne d'influence de q n'est que de 3,6 pour 100 par excès.

D'autre part, les erreurs sur les lignes d'influence des montants, des membrures et des diagonales sont relativement faibles, du moins sur les ordonnées les plus importantes. Elles sont les plus faibles

(même comme erreurs absolues) sur les ordonnées maxima. En outre, elles sont le plus souvent par excès, donc dans le sens de la sécurité, de sorte que la méthode approchée peut être considérée comme satisfaisante pour un calcul de prédétermination des sections et même au point de vue de la sécurité, mais non de l'économie, pour un calcul définitif.

Il serait intéressant de voir quelle est l'influence sur les lignes d'influence des montants, des membrures et des diagonales, de l'erreur qu'entraîne la ligne d'influence approchée de q . On pourrait ainsi se rendre compte plus exactement de l'approximation due à la décomposition proprement dite du treillis hyperstatique en deux autres isostatiques. Mais cette discussion demanderait le tracé des lignes d'influence approchées, dans l'arc rendu isostatique extérieurement. Elle exigerait un exposé s'écartant trop de l'objet principal du présent chapitre, qui est de faire une application de la méthode développée au chapitre précédent.



CONCLUSION.

Nous avons fait, dans les chapitres précédents, une application du principe de réciprocité de Maxwell à un système de degré d'hyperstaticité intérieure élevé. L'arc traité était en même temps hyperstatique extérieurement. On a vu que le principe de Maxwell s'applique également dans ce cas. Il peut être utilisé dans l'étude des lignes d'influence de tous les éléments hyperstatiques, aussi bien extérieurs qu'intérieurs, pourvu que les systèmes étudiés restent indéformables après coupure par rapport à l'élément hyperstatique considéré.

Mais nous avons vu dans le Chapitre I que le principe de Maxwell n'est en somme qu'un cas particulier du principe des travaux virtuels. Celui-ci est tout à fait général. Considéré sous sa forme la plus habituelle, il s'applique plus particulièrement aux systèmes qui *deviennent* déformables après coupure par rapport à l'élément dont on recherche la ligne d'influence. Une application en a d'ailleurs été exposée au Chapitre III, à l'occasion du tracé des lignes d'influence des efforts normaux dans les membrures et les diagonales des arcs à losanges, obtenus par suppression des montants surabondants des arcs à montants et croix de Saint-André.

Dans un travail précédent, qui a été primé en 1934 au Concours des Bourses de Voyage du Gouvernement belge et, en 1935, au Concours pour le « Prix Scientifique Interfacultaire Louis Empain », nous avons fait une étude plus détaillée du mode d'application du principe des travaux virtuels aux *systèmes isostatiques à losanges*.

Dans le même travail, nous avons établi des équations toutes résolues des lignes d'influence des efforts normaux dans les barres des *systèmes à losanges hyperstatiques du premier degré*.

Nous avons en outre fait une étude directe des lignes d'influence des poutres droites à montants et croix de Saint-André, pour le cas

des charges verticales. Cette étude vient de paraître dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (Paris), ainsi qu'il a été dit plus haut.

D'autre part, la présente Thèse traite le cas le plus général et le plus complexe des arcs à montants et croix de Saint-André, non seulement dans l'hypothèse des charges verticales, mais aussi dans celle des forces horizontales.

On voit ainsi que nous avons étudié progressivement les systèmes de degré d'hyperstaticité de plus en plus grand, jusqu'au cas le plus complexe envisagé dans le travail actuel.

La thèse actuelle a été établie au cours de mon séjour à Paris, en 1935-36. Celui-ci n'a été possible que grâce à l'octroi d'une *bourse de voyage du Gouvernement belge*, du *Prix Empain pour la section des sciences appliquées* ainsi que d'un important subside du *Patrimoine de l'Université de Liège*. Qu'il me soit permis d'exprimer à ces trois Institutions l'hommage de ma profonde reconnaissance.

Je tiens aussi à témoigner toute ma gratitude à M. F. CAMPUS, Professeur à l'Université de Liège, qui, après m'avoir suggéré l'étude des poutres en treillis à croix de Saint-André, n'a cessé de s'intéresser au développement de la thèse actuelle, à M. le Professeur H. BÉGHIN, dont j'ai eu l'avantage d'être l'élève et auprès de qui j'ai toujours rencontré un bienveillant accueil, ainsi qu'à MM. SUQUET et GRELOT, respectivement Directeur et Sous-Directeur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, dont l'appui bienveillant a encouragé la publication, dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, du Mémoire sur les poutres droites en croix de Saint-André.

Vu et approuvé :

Paris, le 31 juillet 1937.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 31 juillet 1937.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

S. CHARLÉTY.

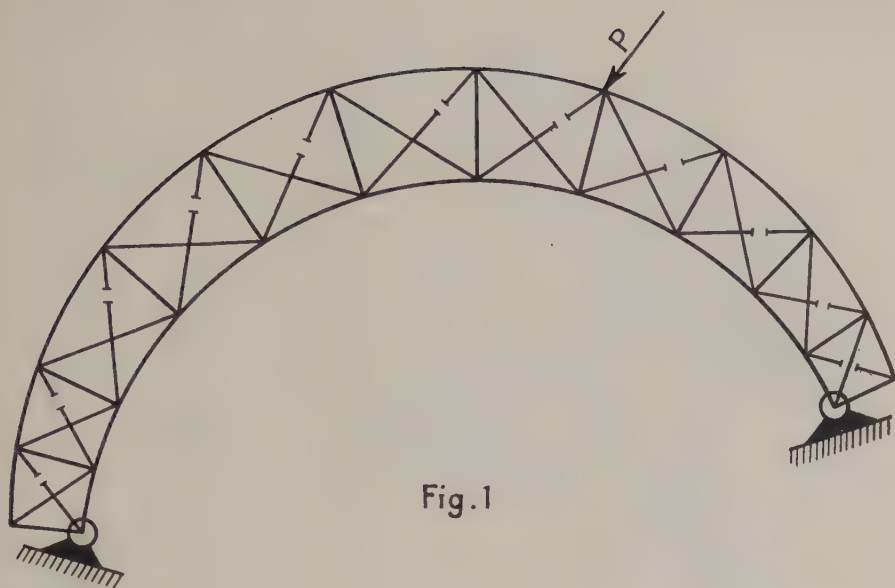


Fig. 1

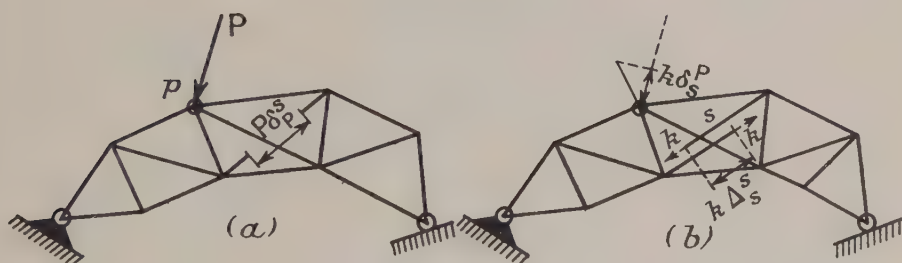


Fig. 4

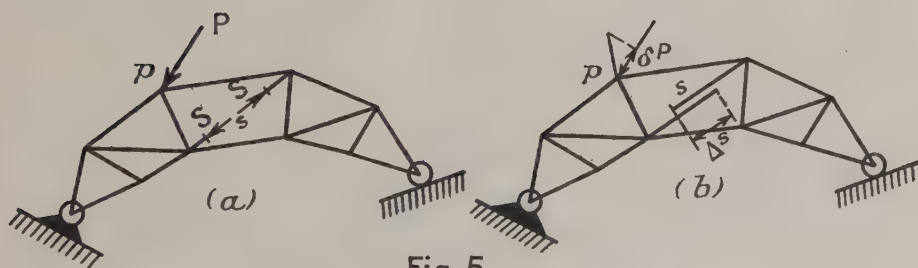


Fig. 5

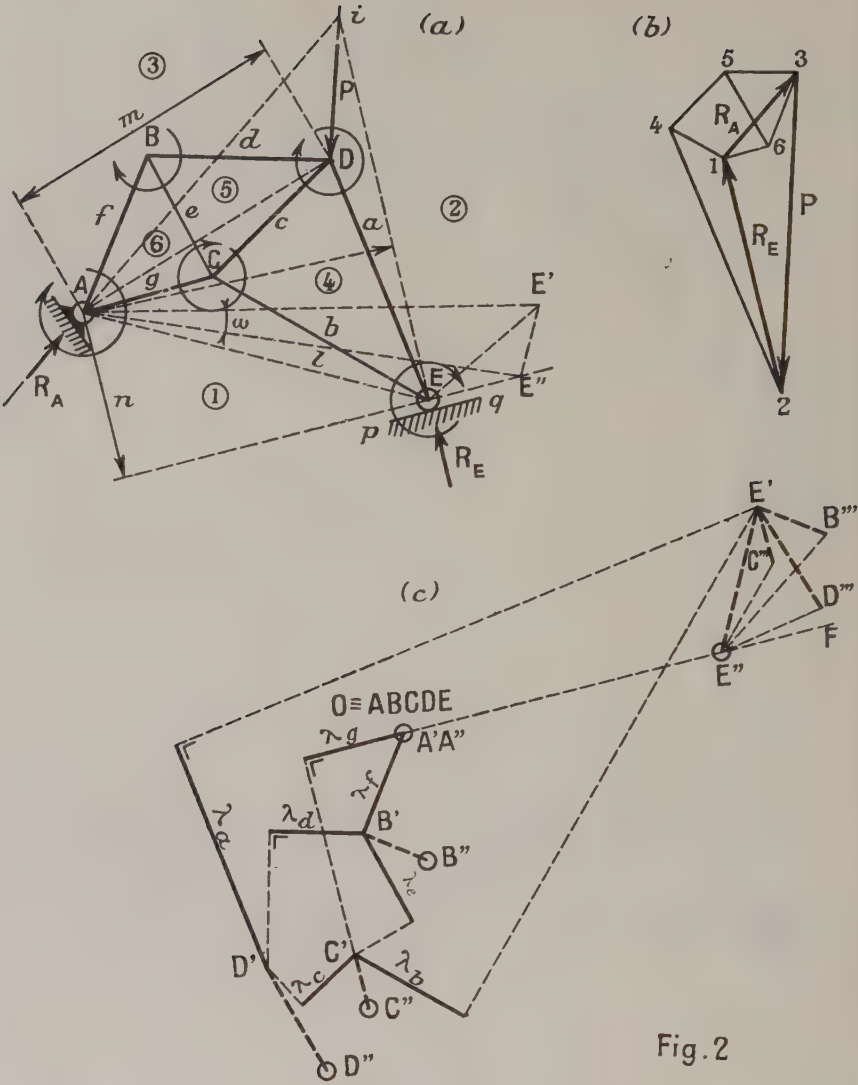


Fig. 2

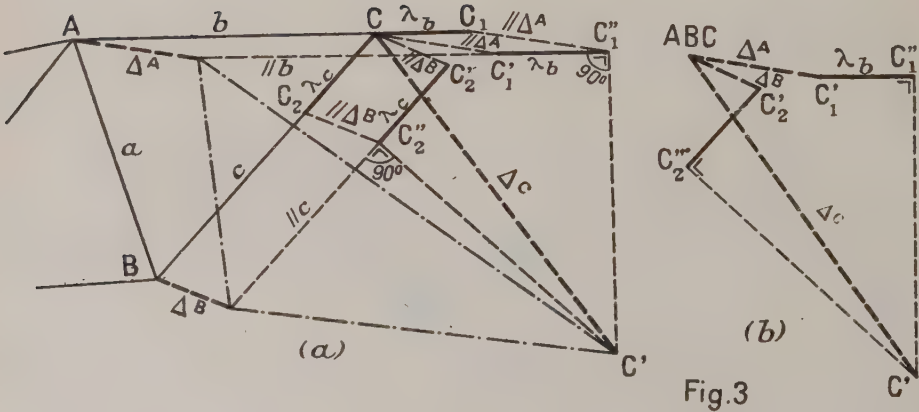


Fig. 3

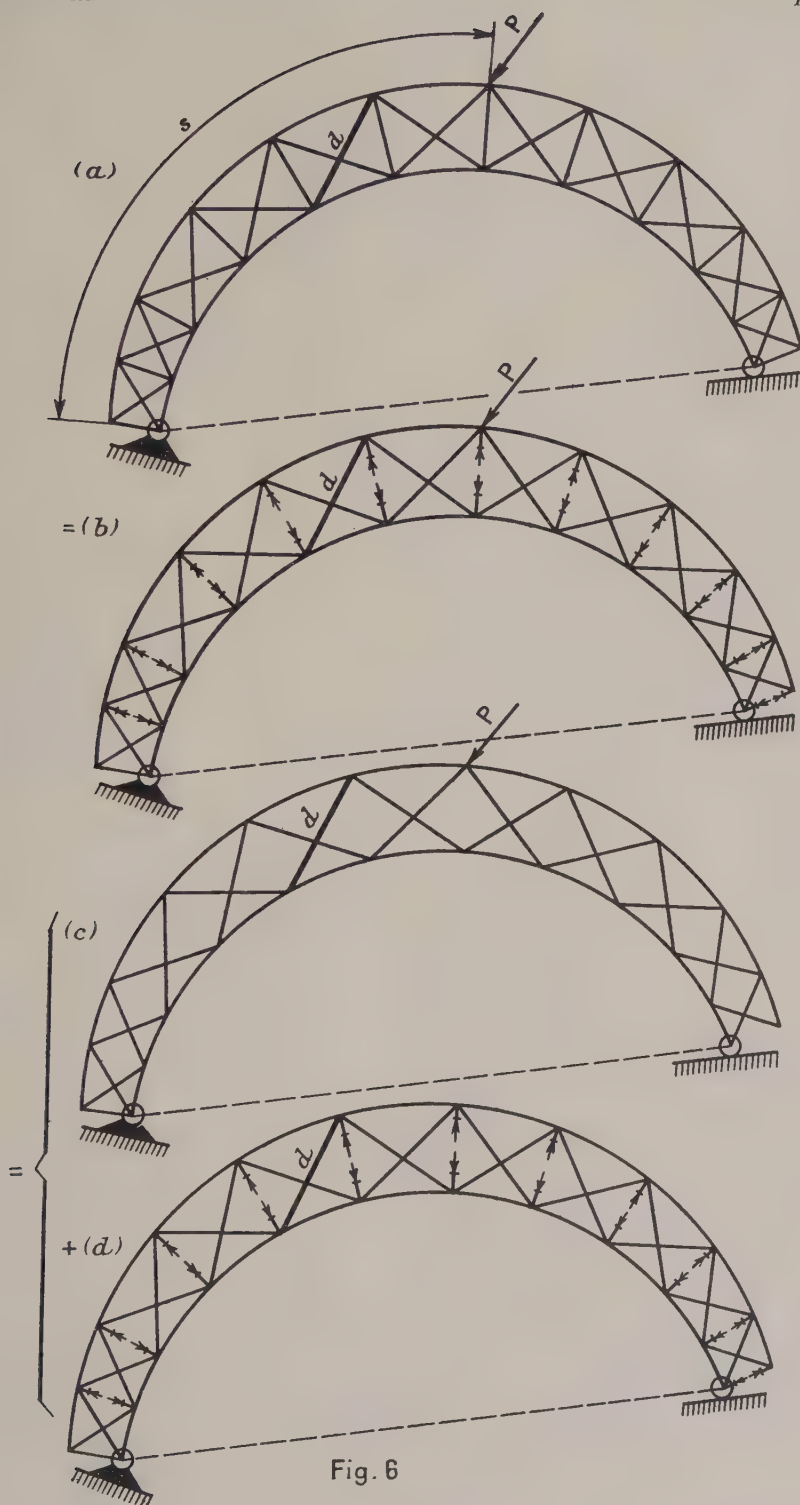


Fig. 6

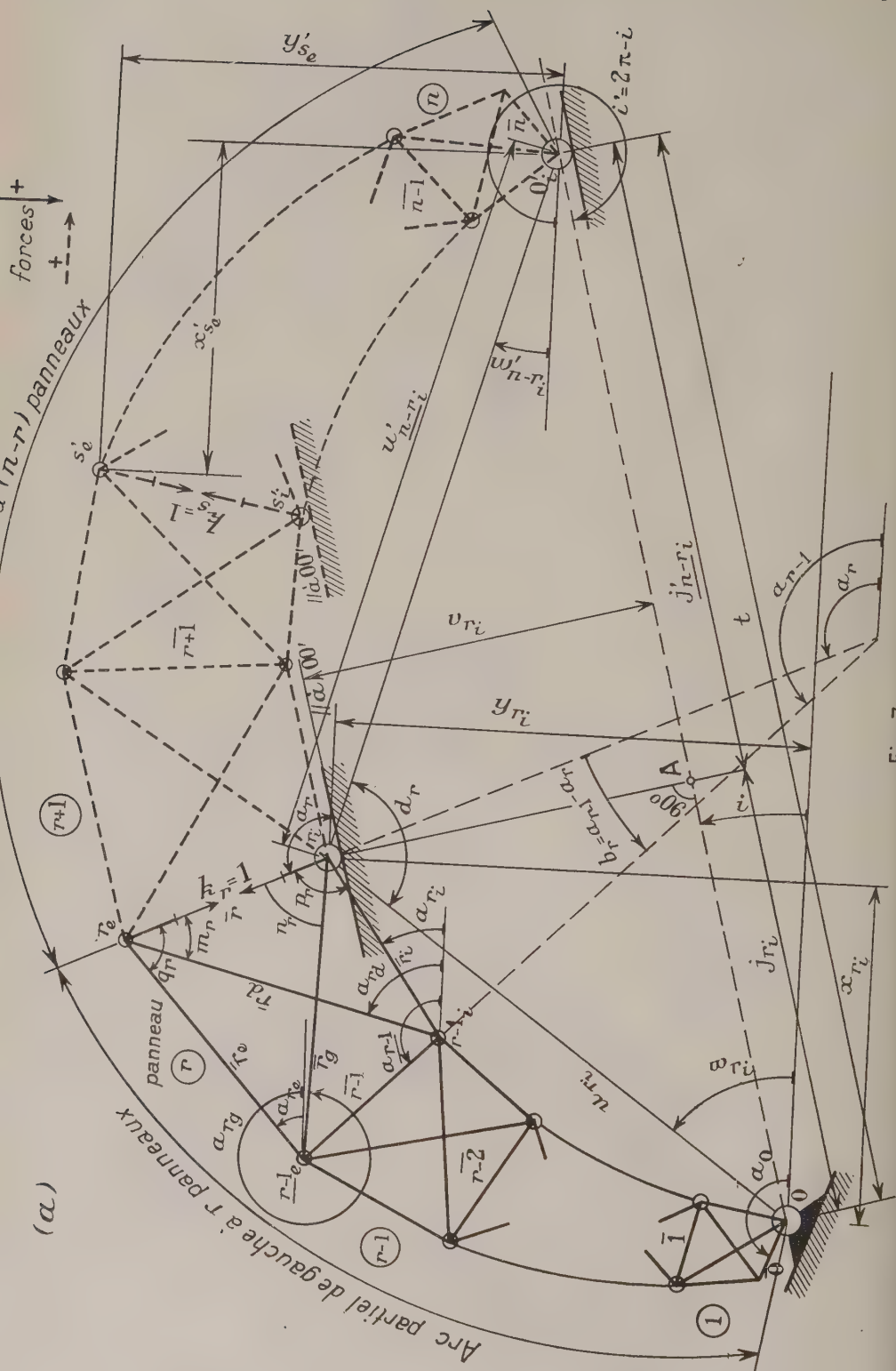


Fig. 7

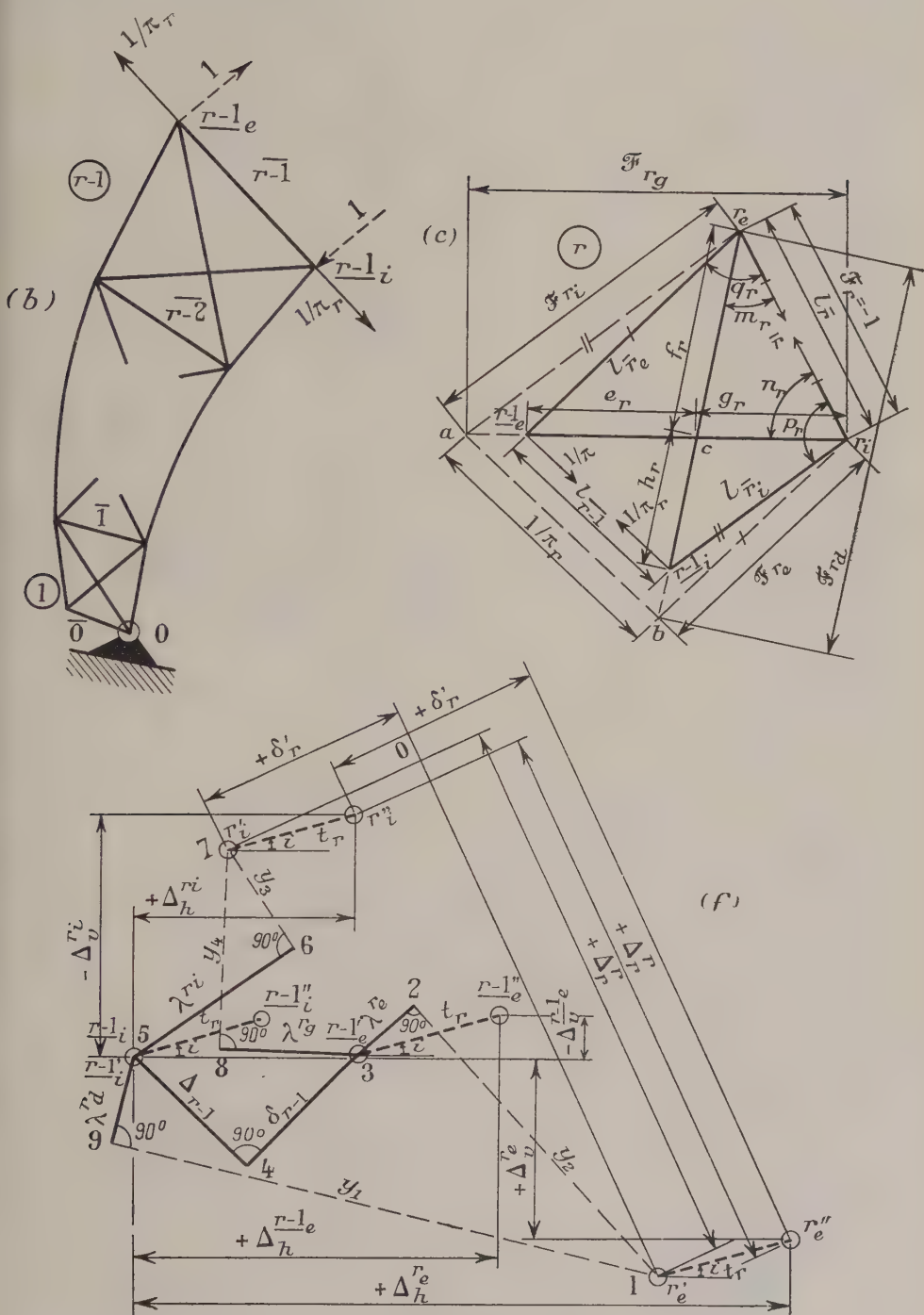


Fig.7 (suite)

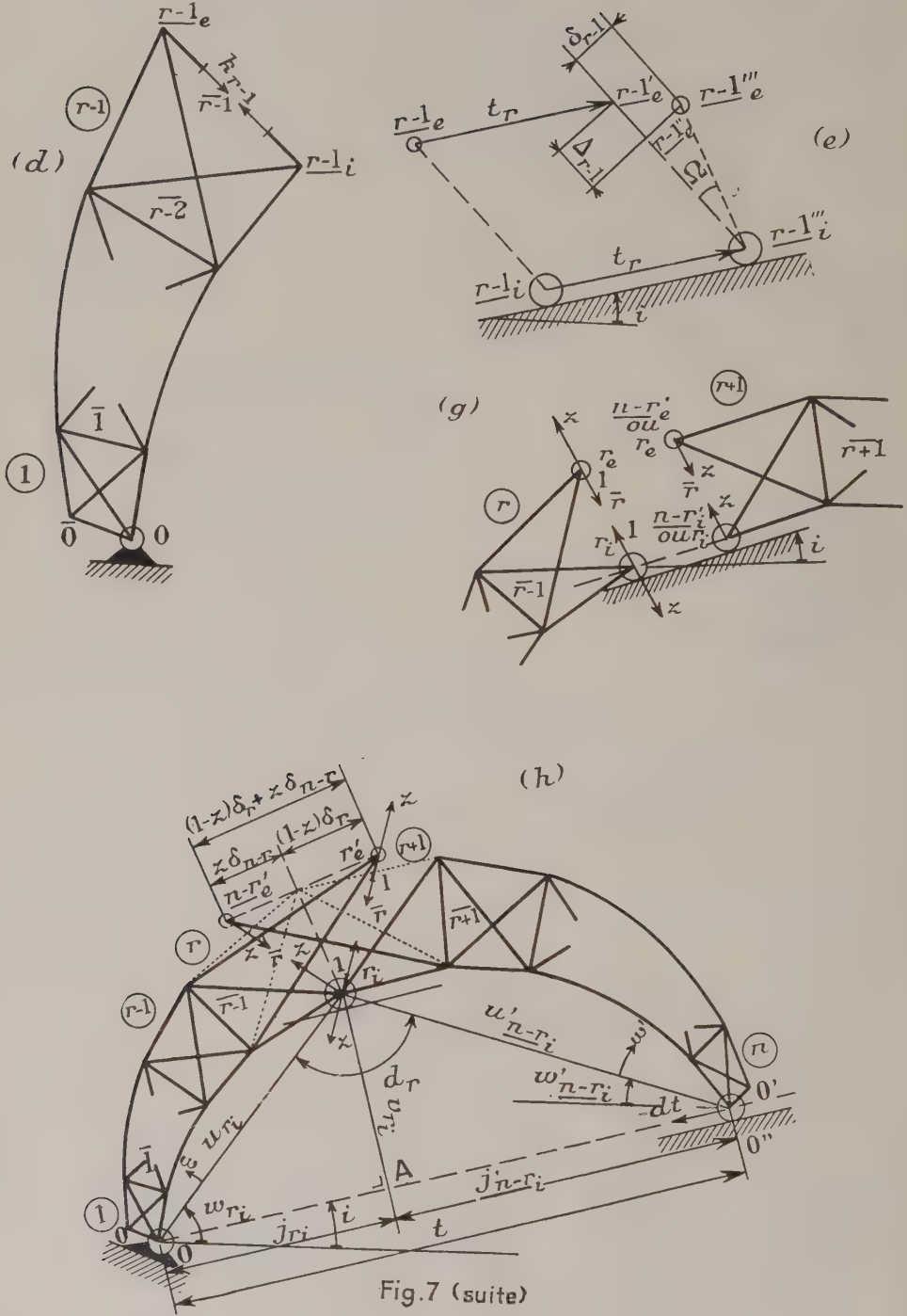


Fig.7 (suite)

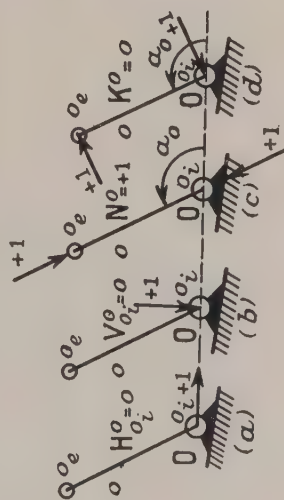
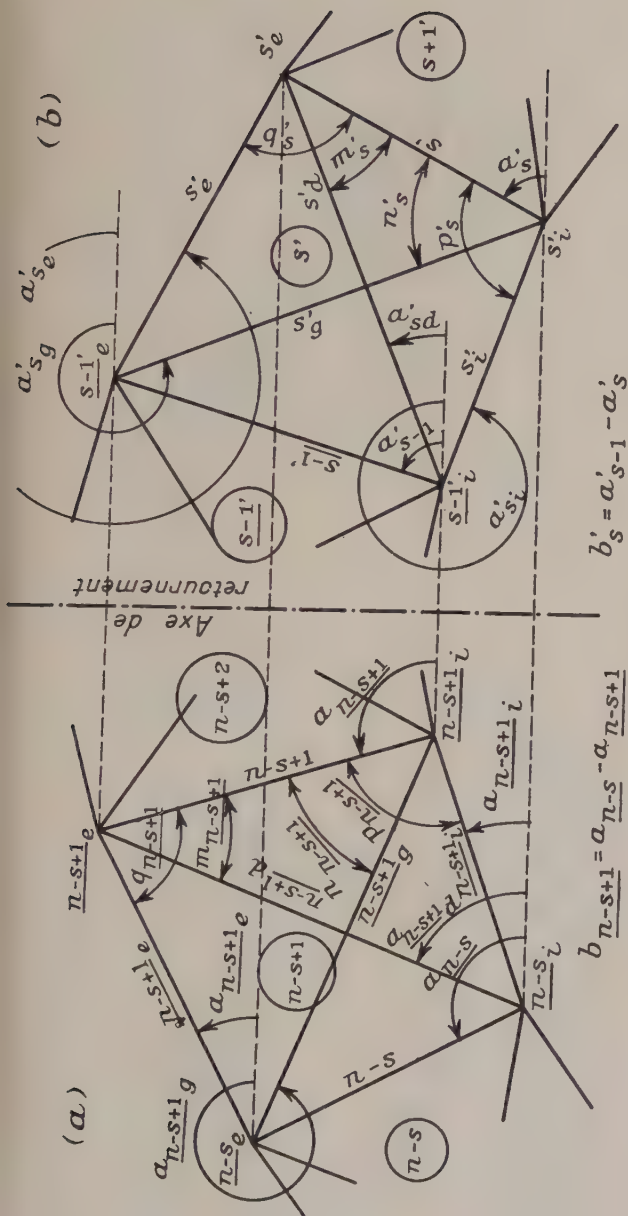
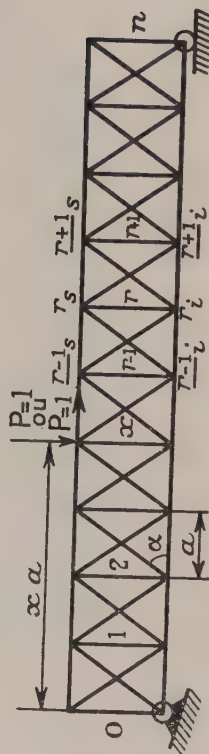


Fig. 10



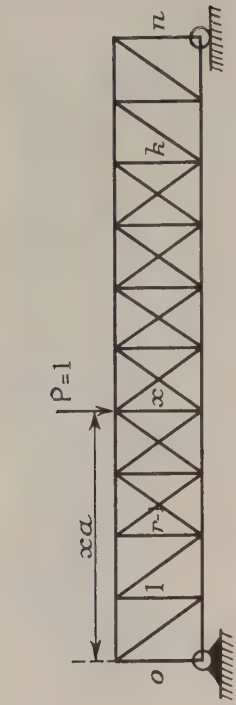


Fig. 12

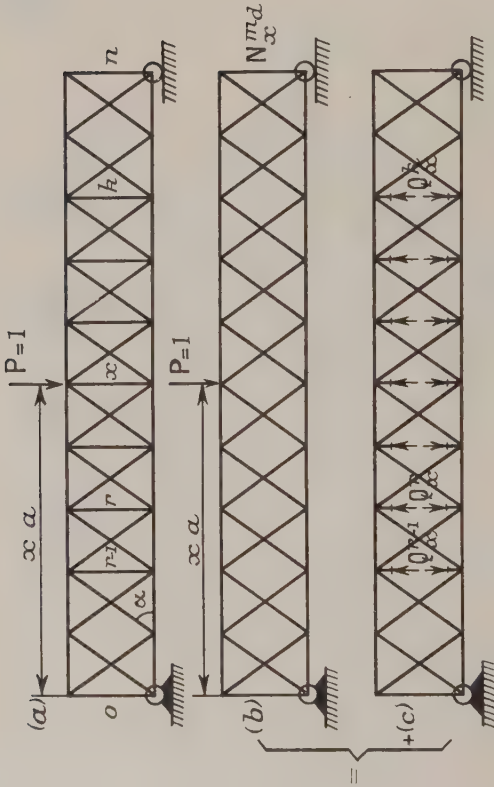


Fig. 11

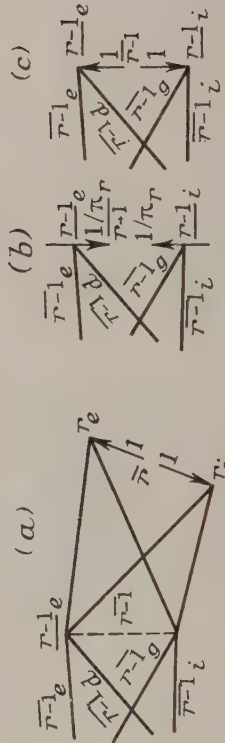


Fig. 24

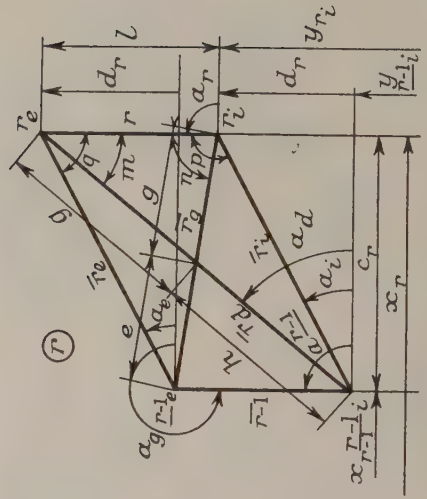


Fig. 15

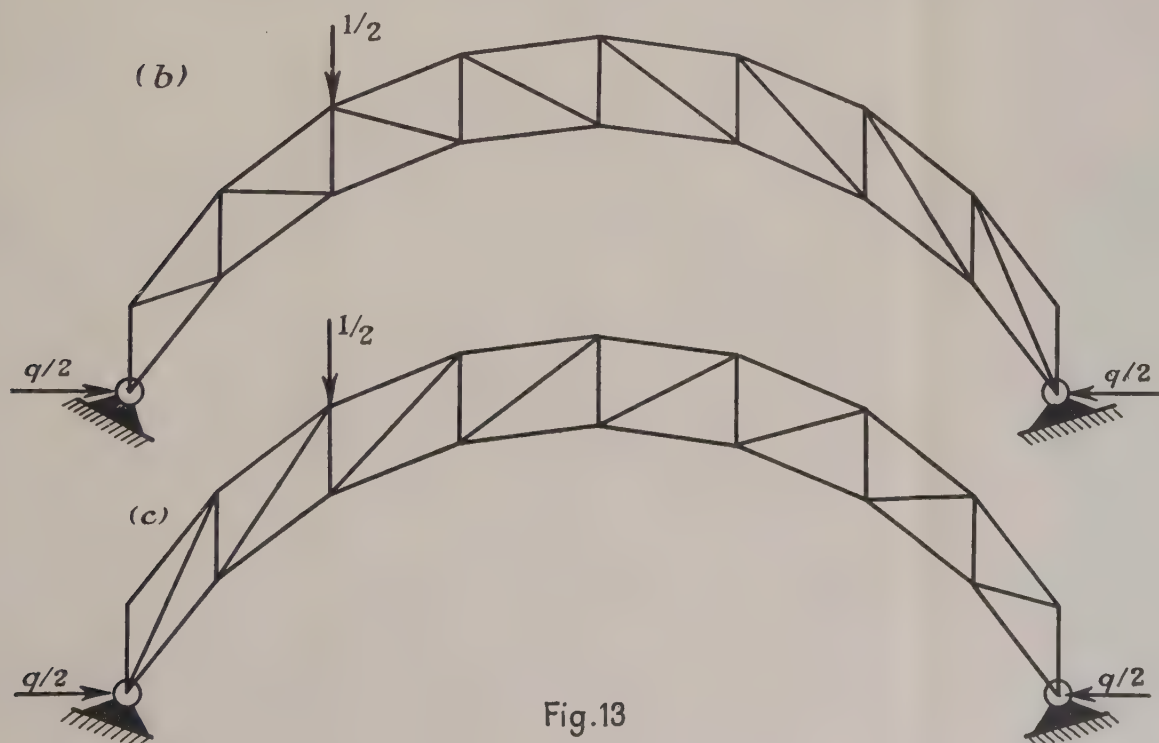
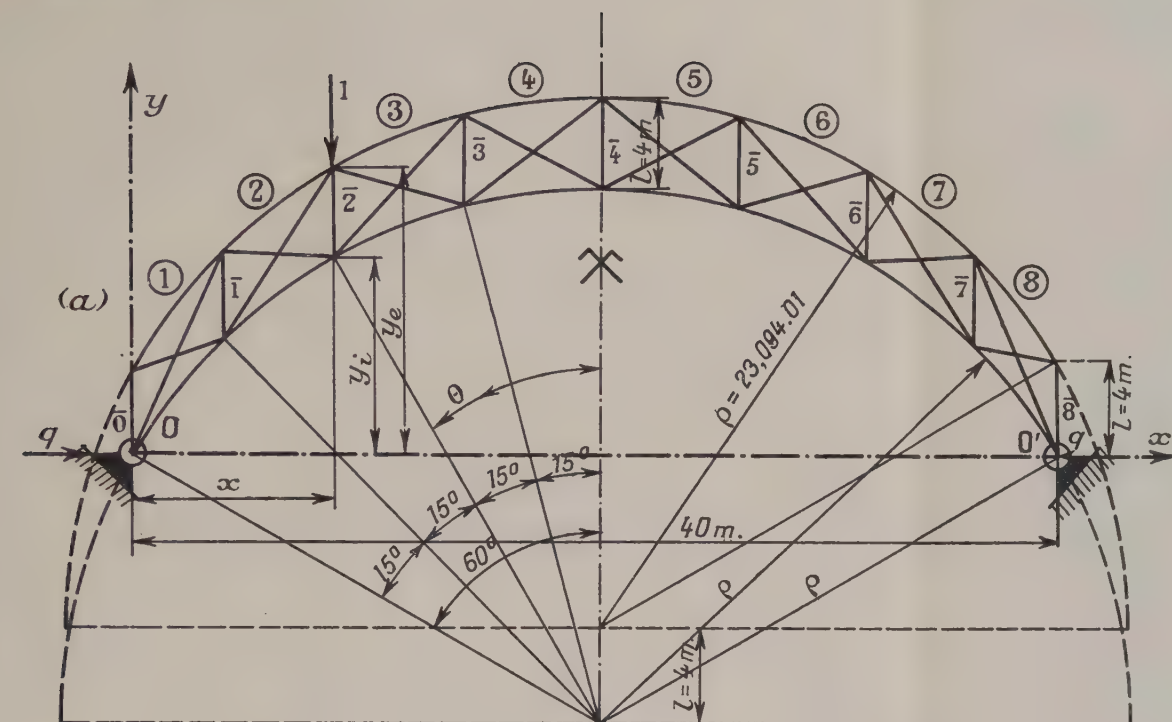
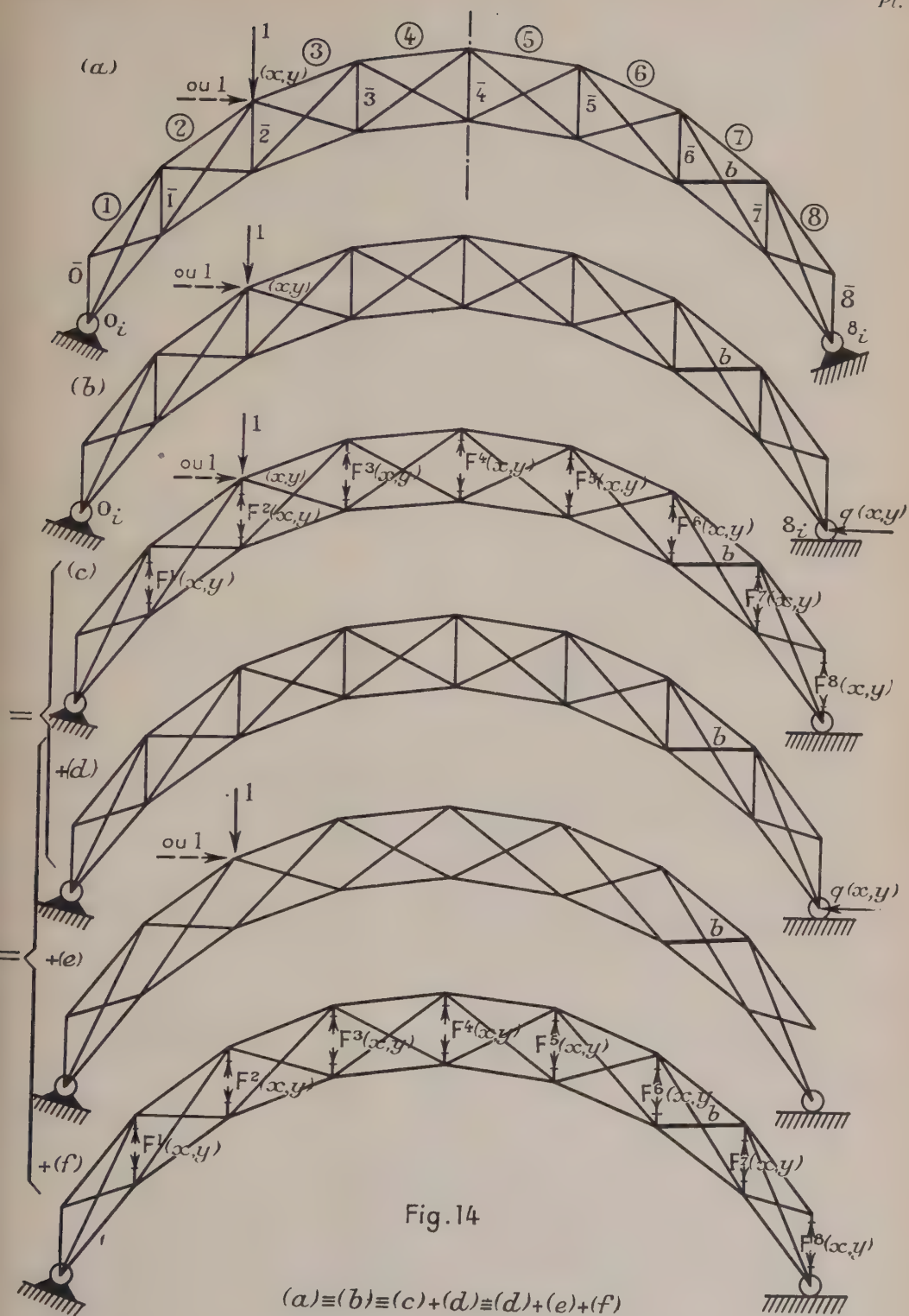


Fig.13



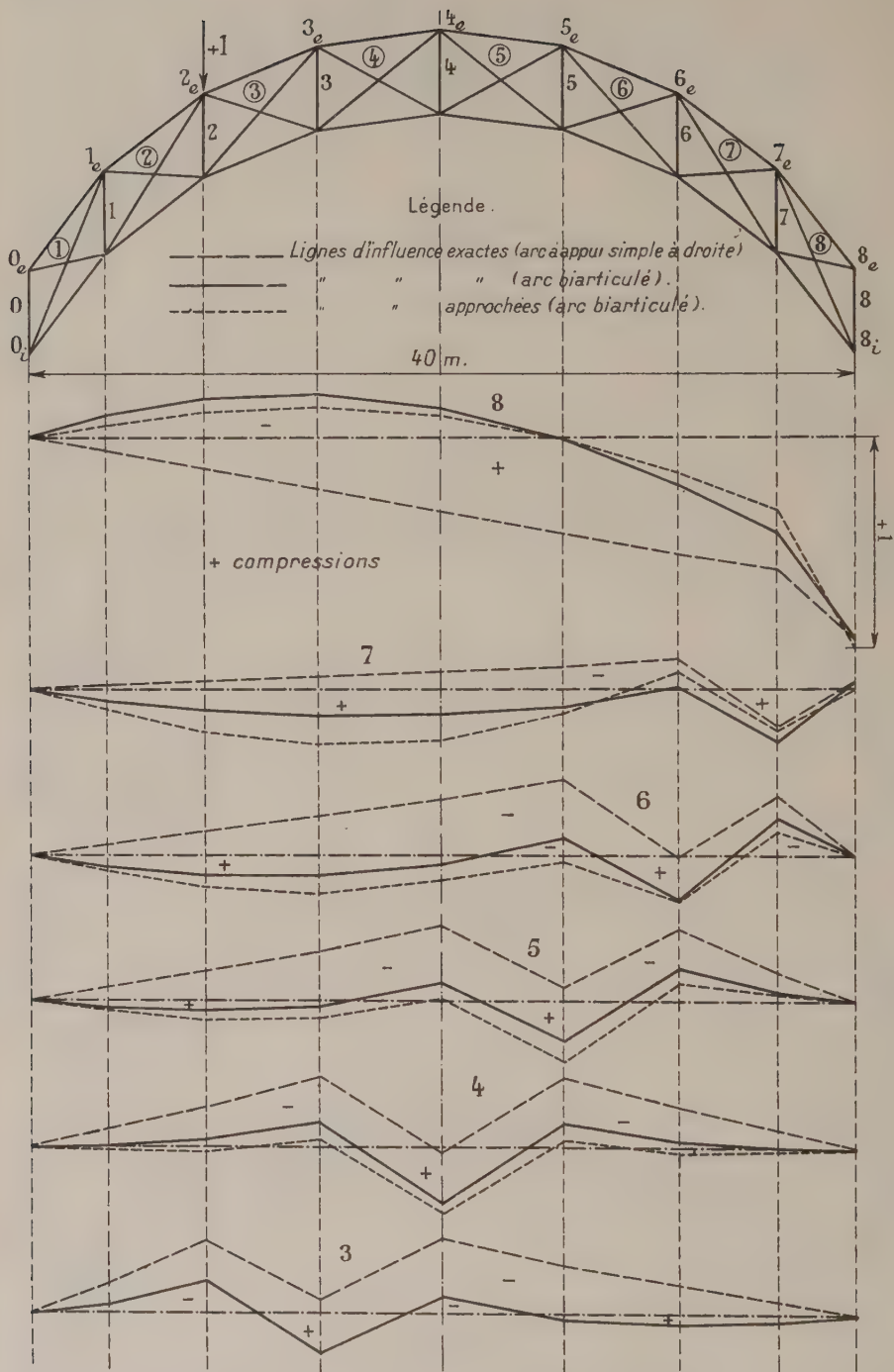
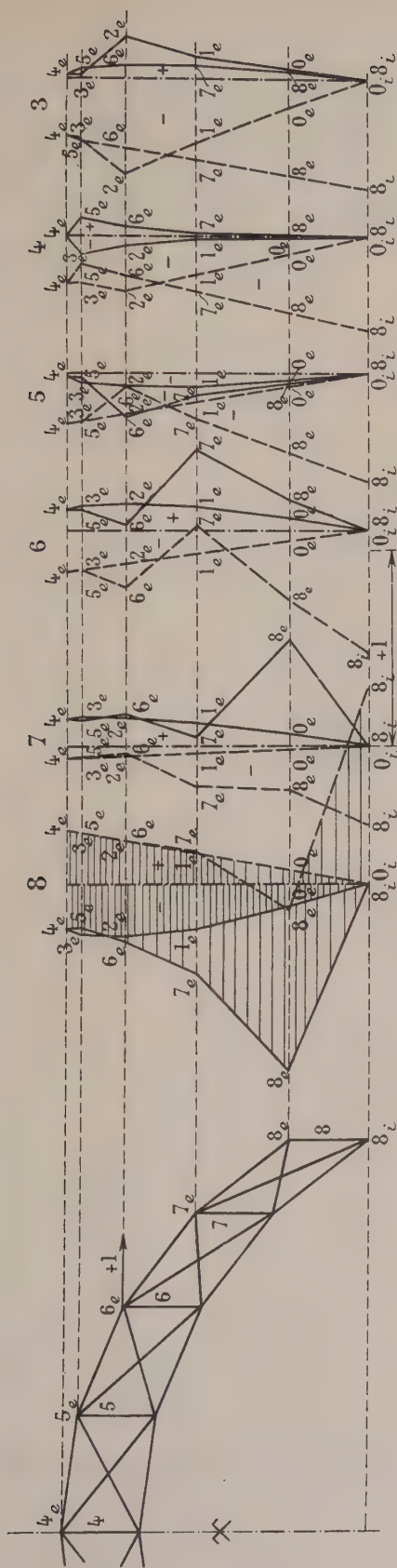


Fig.16: Lignes d'influence des montants pour des charges verticales



Légende: --- Lignes d'influence exactes (arc isostatique extérieur à appui simple à droite), — Lignes d'influence exactes (arc biarticulé, hyperstatique extérieur). — Lignes d'influence exactes (arc isostatique extérieur à appui simple à gauche), — Lignes d'influence exactes (arc biarticulé, hyperstatique extérieur).

Fig.17: Lignes d'influence des montants pour des forces horizontales

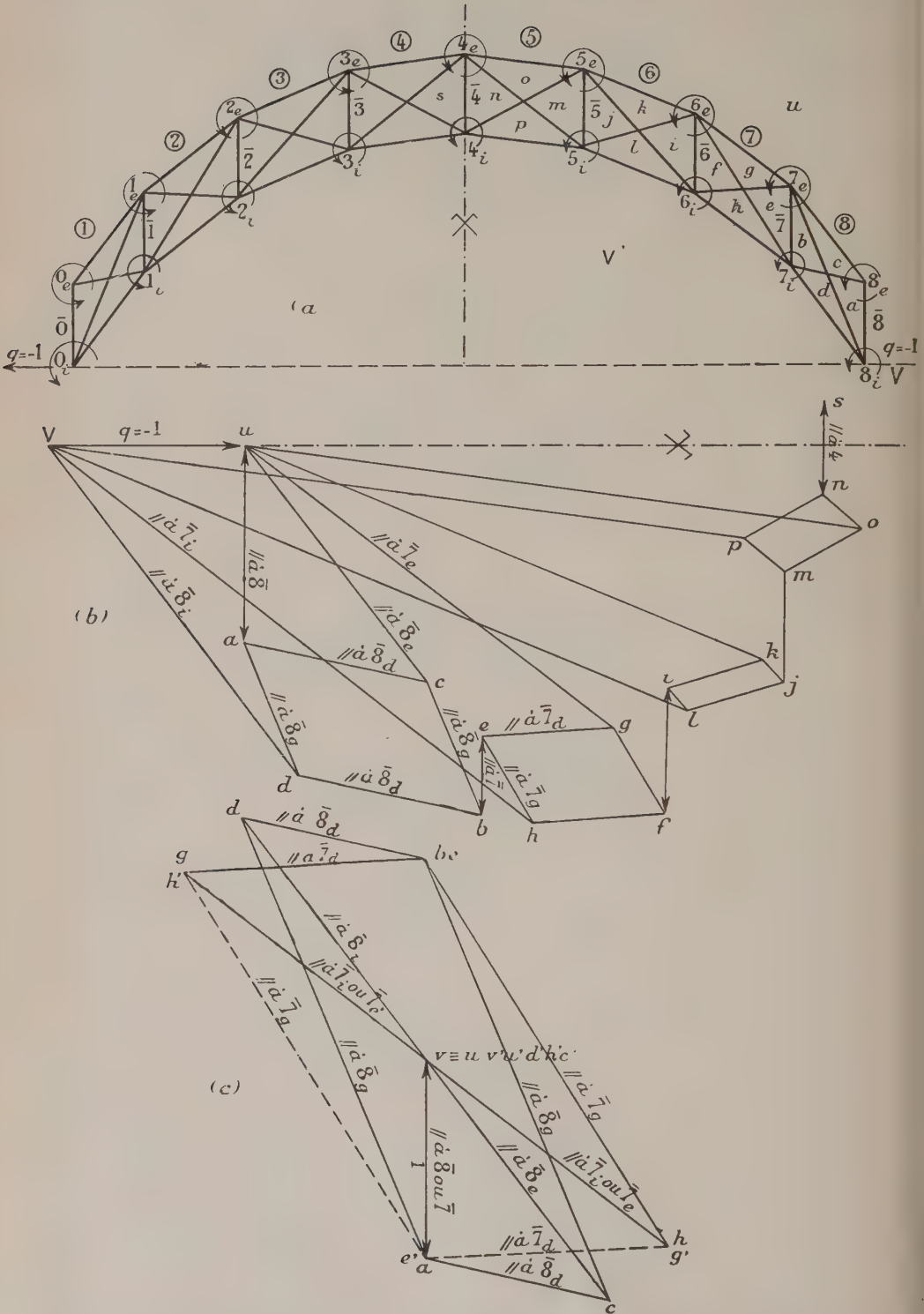
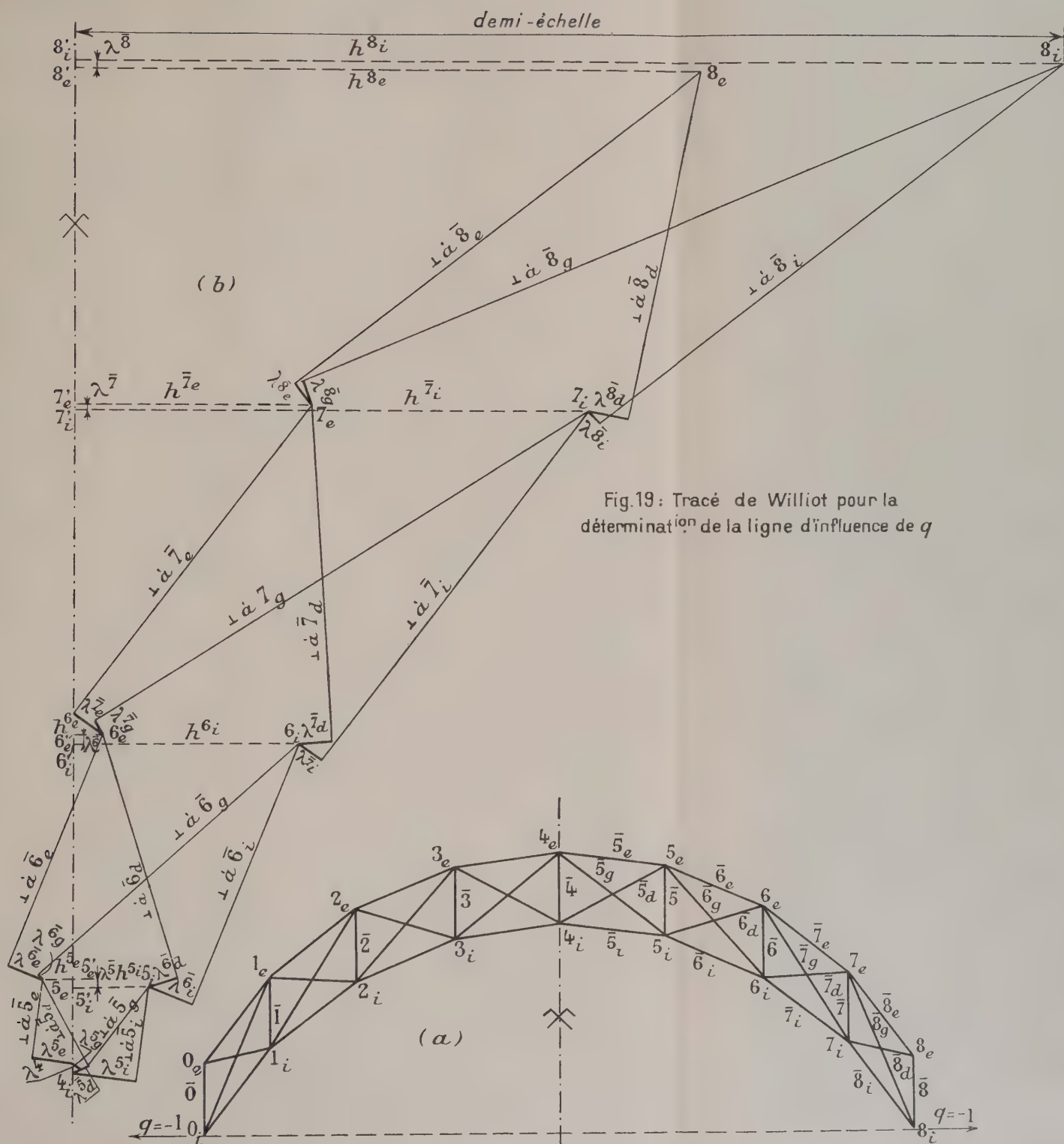


Fig.18: (b) Tracé de Crémona pour $q=-1$; (c) Tracé de Crémona pour l'obtention de $\alpha_{7e,i,g,d}^{\bar{8} \text{ et } \bar{7}}$



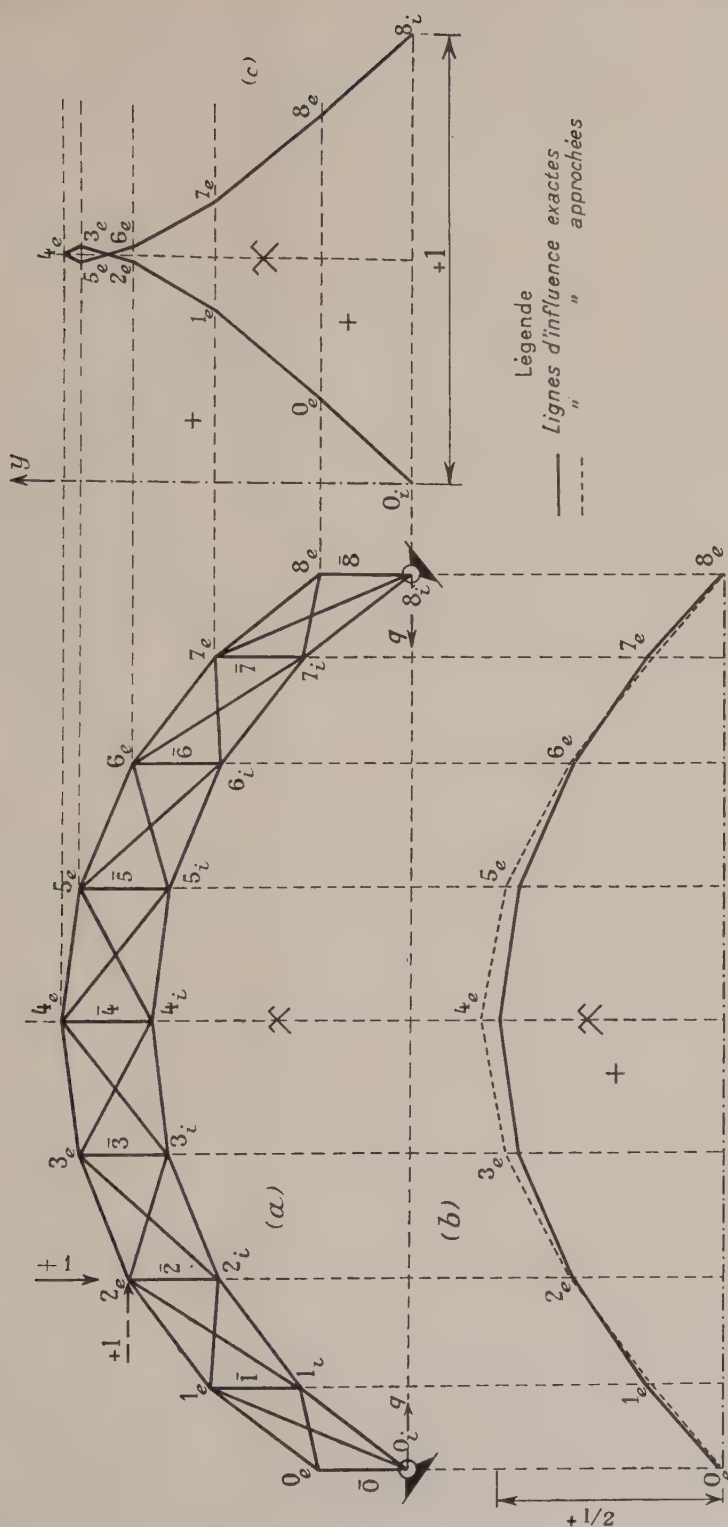
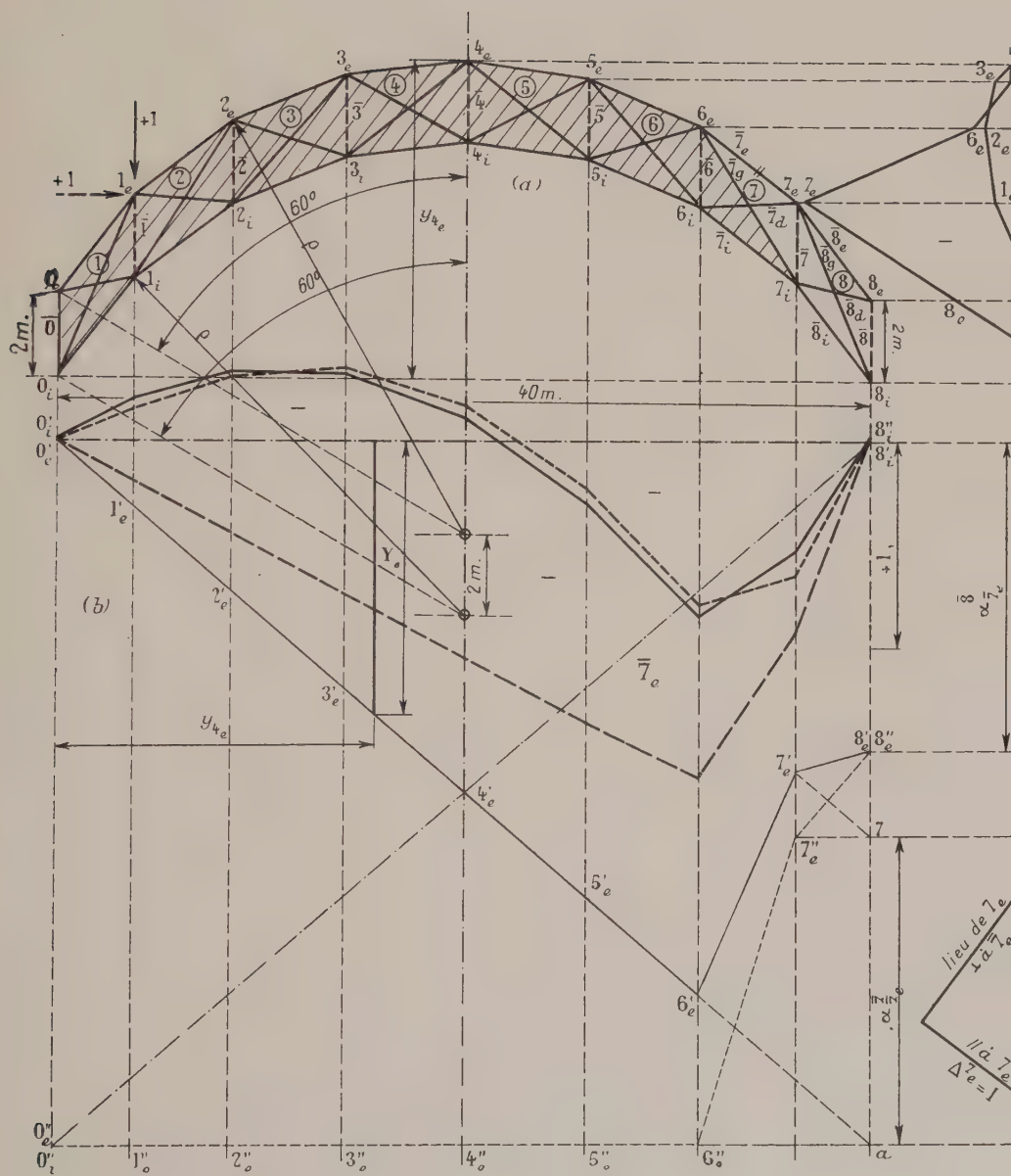
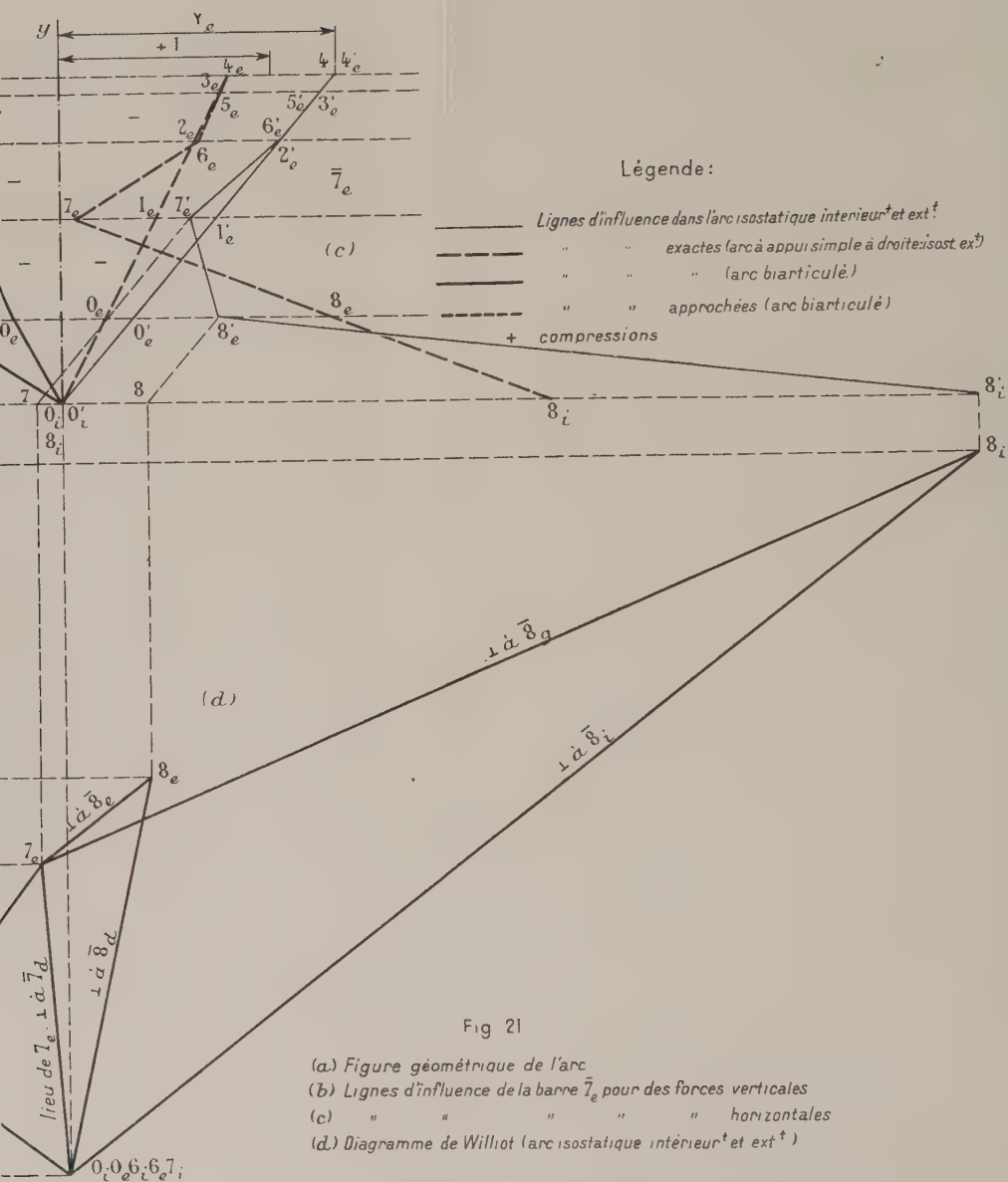


Fig. 20: Lignes d'influence de la poussée q : (b) pour des forces verticales
(c) " " " " horizontales





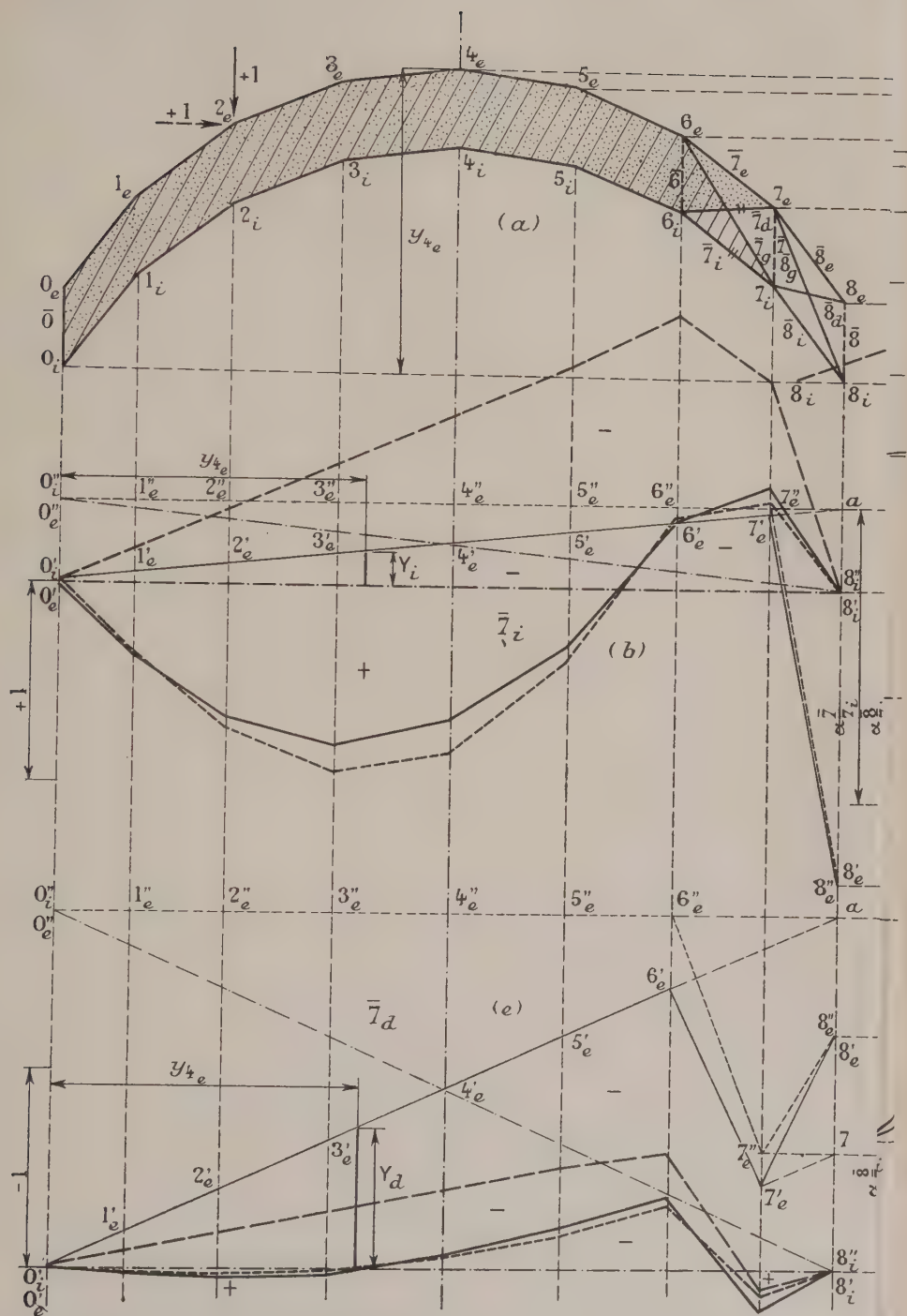


Fig. 22 : (a) figure de l'arc; (b) Lignes d'influence barre $\bar{Z}_1$ (forces verticales); (c) Lignes d'influence barre $\bar{Z}_2$ (forces verticales); (d) " " " $\bar{Z}_3$ ("); (e) " " " $\bar{Z}_4$ ("); (f) " " " $\bar{Z}_5$ (")

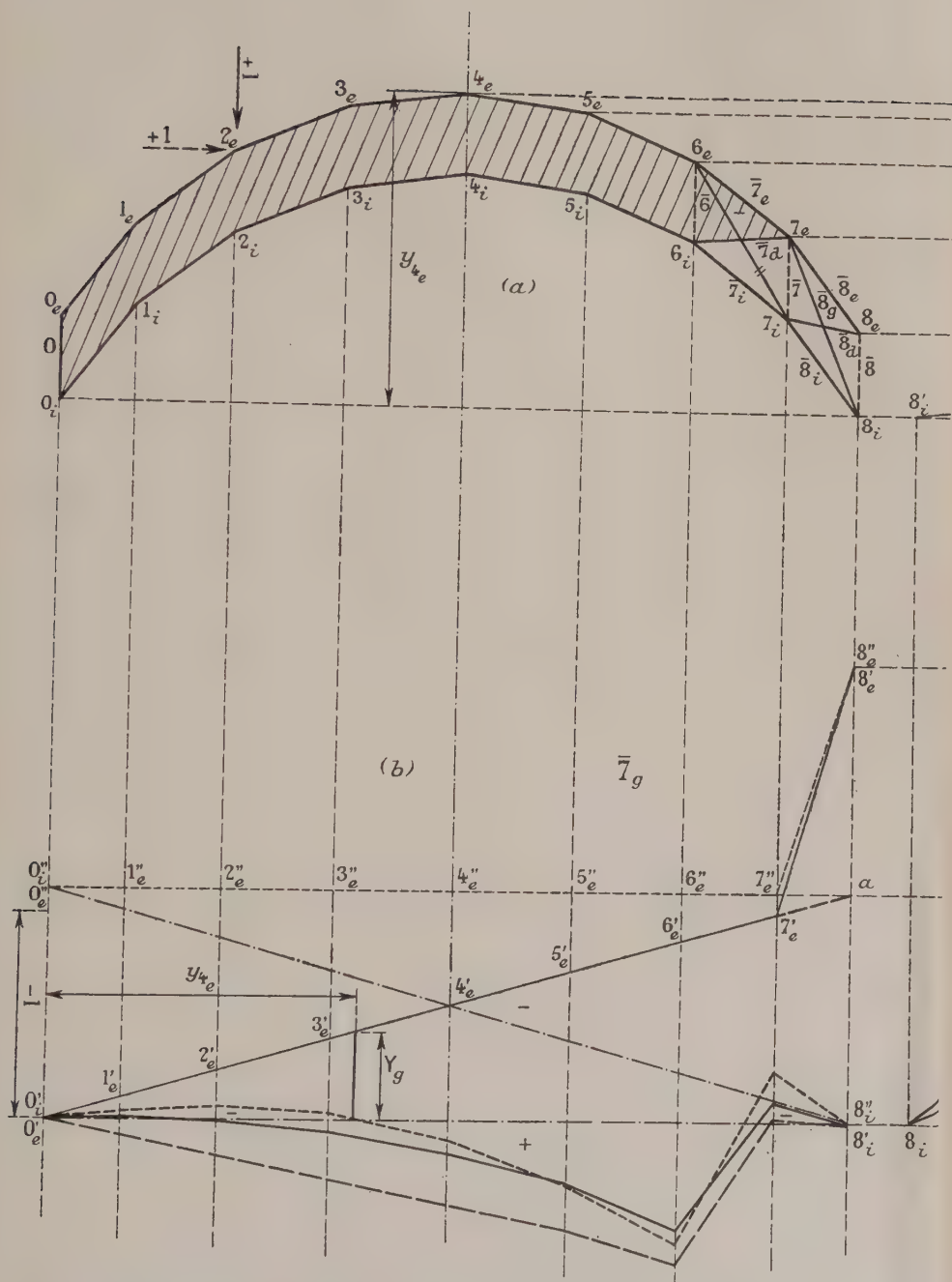
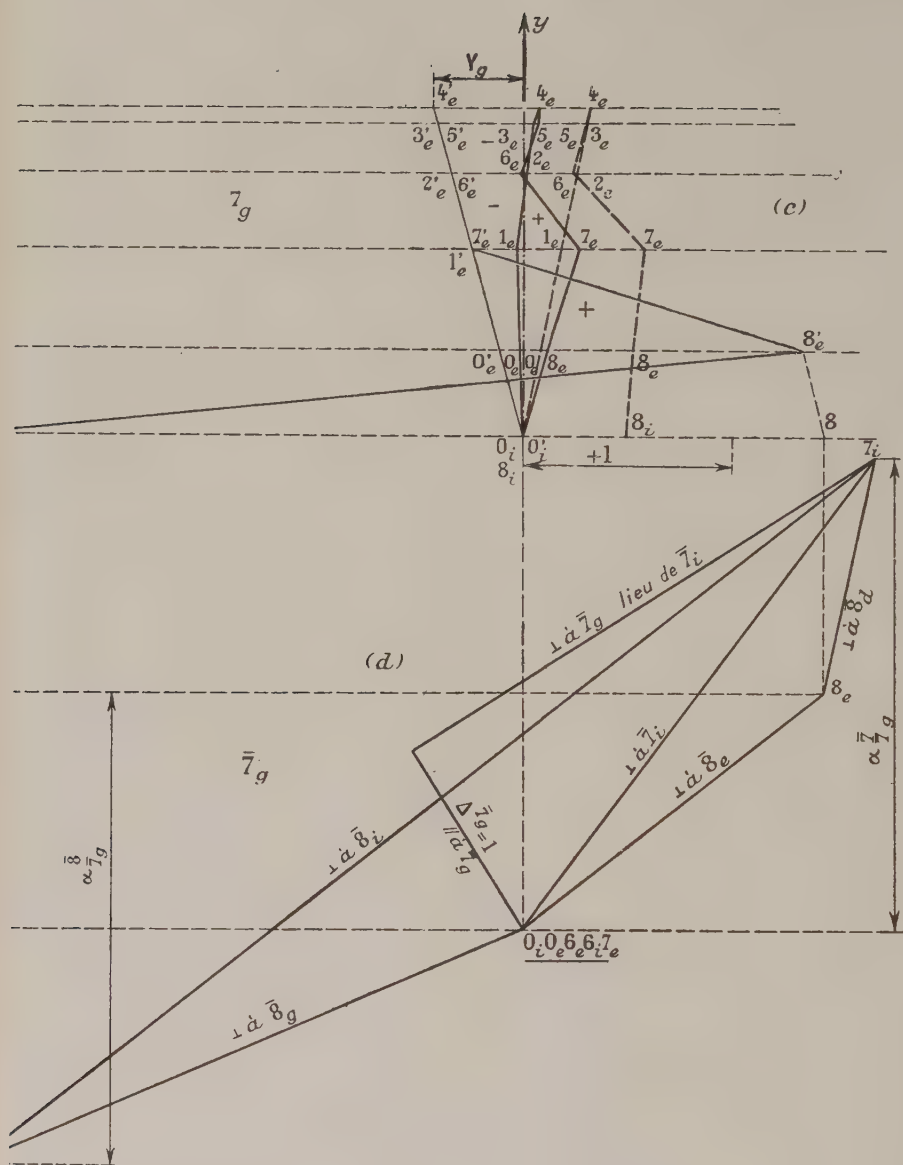


Fig. 23 : (a) figure de l'arc; (b) lignes d'influence de la barre $\overline{I}g$ (forces verticales); (c) Lignes d'influence (d) tracé de Williot (arc isostatique intérieurement et extérieurement).



ce de la barre $\bar{Z}_g$ (forces horizontales);

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Étude et contrôle des matériaux au moyen des rayons X

Vu et approuvé :

Paris, le 31 juillet 1937.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
CH. MAURAIN.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 31 juillet 1937.

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
S. CHARLÉTY.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

108170-38 Quai des Grands-Augustins, 55.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
108170 Quai des Grands-Augustins, 55.
